

Microeconomía 1

Práctica Dirigida 7 — Solucionario

Tecnología, función de producción y la empresa competitiva

Profesor: José Gallardo Ku (j.gallardo@pucp.edu.pe)

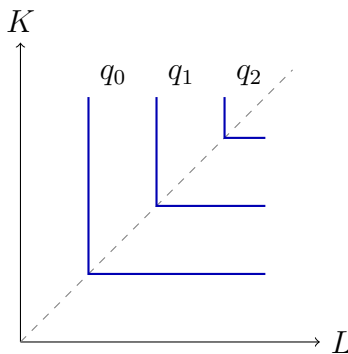
Jefes de práctica: Marcelo Gallardo (marcelo.gallardo@pucp.edu.pe)

Raúl Amao (raul.amao@pucp.edu.pe)

Ejercicios para la sesión de prácticas

1. Isocuantas y rendimientos a escala.

(a) $f(K, L) = [\min\{K, L\}]^{1/3}$. La transformación $(\cdot)^{1/3}$ es monótona creciente, de modo que las isocuantas son las del núcleo Leontief $\min\{K, L\}$: en forma de L con el vértice sobre la recta $K = L$. Los factores son *complementarios perfectos* (se usan en proporción fija 1:1).



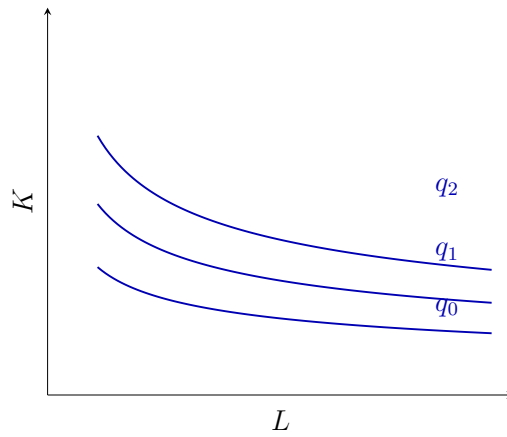
Productividades marginales y TMST (en términos del tramo relevante):

$$PMg_L = \begin{cases} 0, & L > K \\ \frac{1}{3}L^{-2/3}, & L < K \end{cases} \quad PMg_K = \begin{cases} 0, & K > L \\ \frac{1}{3}K^{-2/3}, & K < L \end{cases}$$

$$TMST = \frac{PMg_L}{PMg_K} = \begin{cases} 0, & L > K \\ \infty, & L < K. \end{cases}$$

Rendimientos a escala: $f(\lambda K, \lambda L) = [\min\{\lambda K, \lambda L\}]^{1/3} = \lambda^{1/3}[\min\{K, L\}]^{1/3} = \lambda^{1/3}f(K, L) < \lambda f(K, L)$ para $\lambda > 1$. *Rendimientos decrecientes a escala.*

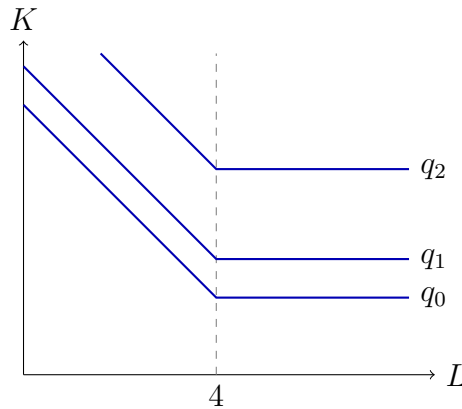
(b) $f(K, L) = K^3L$ (Cobb-Douglas). Isocuantas convexas, decrecientes y suaves; factores *sustituibles* con TMST decreciente a lo largo de cada isocuanta.



$$PMg_L = K^3, \quad PMg_K = 3K^2L, \quad TMST = \frac{PMg_L}{PMg_K} = \frac{K^3}{3K^2L} = \frac{K}{3L}.$$

Rendimientos a escala: $f(\lambda K, \lambda L) = (\lambda K)^3(\lambda L) = \lambda^4 K^3 L > \lambda f(K, L)$ para $\lambda > 1$ (homogénea de grado 4). *Rendimientos crecientes a escala.*

(c) $f(K, L) = \min\{L + K, K + 4\}$. El primer término domina cuando $L < 4$ y el segundo cuando $L > 4$. La isocuanta tiene un tramo de pendiente -1 (sustitutos perfectos) mientras $L < 4$ y se vuelve *horizontal* para $L > 4$, donde añadir trabajo ya no aumenta el producto.



$$PMg_L = \begin{cases} 1, & L < 4 \\ 0, & L > 4 \end{cases} \quad PMg_K = 1 \text{ (en ambos tramos)}$$

$$TMST = \frac{PMg_L}{PMg_K} = \begin{cases} 1, & L < 4 \\ 0, & L > 4. \end{cases}$$

Rendimientos a escala (análisis por tramos):

- *Tramo* $L \leq 4$: $f = L + K$, homogénea de grado 1 \Rightarrow *rendimientos constantes.*
- *Tramo* $L > 4$: $f = K + 4$, $f(\lambda K, \lambda L) = \lambda K + 4 < \lambda(K + 4) = \lambda f(K, L)$ para $\lambda > 1 \Rightarrow$ *rendimientos decrecientes.*

El término constante $+4$ impide la homogeneidad global: tomada en conjunto, la tecnología exhibe rendimientos (débilmente) decrecientes a escala. ■

2. Productividades marginal y media.

Sea $f(\ell, k) = (\ell k)^\alpha + \ell^{1-\alpha} = \ell^\alpha k^\alpha + \ell^{1-\alpha}$, con $0 < \alpha < 1$.

(a) Para ℓ :

$$PMg_\ell = \frac{\partial f}{\partial \ell} = \alpha \ell^{\alpha-1} k^\alpha + (1-\alpha) \ell^{-\alpha}, \quad \frac{\partial PMg_\ell}{\partial \ell} = \alpha(\alpha-1) \ell^{\alpha-2} k^\alpha - \alpha(1-\alpha) \ell^{-\alpha-1} < 0,$$

pues $\alpha(\alpha-1) < 0$ y $-\alpha(1-\alpha) < 0$. Para k :

$$PMg_k = \frac{\partial f}{\partial k} = \alpha \ell^\alpha k^{\alpha-1}, \quad \frac{\partial PMg_k}{\partial k} = \alpha(\alpha-1) \ell^\alpha k^{\alpha-2} < 0.$$

Ambas productividades marginales son *decrecientes*.

(b) Productividad media de ℓ :

$$PMe_\ell = \frac{f(\ell, k)}{\ell} = \ell^{\alpha-1} k^\alpha + \ell^{-\alpha}.$$

Comparándola con $PMg_\ell = \alpha \ell^{\alpha-1} k^\alpha + (1-\alpha) \ell^{-\alpha}$:

$$PMe_\ell - PMg_\ell = (1-\alpha) \ell^{\alpha-1} k^\alpha + \alpha \ell^{-\alpha} > 0 \implies PMe_\ell > PMg_\ell.$$

La productividad media es mayor que la marginal (consistente con productos marginales decrecientes: mientras el PMg cae, arrastra al PMe por debajo de sí, dejándolo por encima).

■

3. Minimización de costos y lema de Shephard.

(a) La TMST es

$$TMST = \frac{\partial f / \partial x_1}{\partial f / \partial x_2} = \frac{\frac{1}{3} x_1^{-2/3} x_2^{1/3}}{\frac{1}{3} x_1^{1/3} x_2^{-2/3}} = \frac{x_2}{x_1}.$$

Igualando a w_1/w_2 se obtiene $x_2 = (w_1/w_2)x_1$. Reemplazando en la restricción $x_1^{1/3} x_2^{1/3} = q$:

$$x_1^{2/3} (w_1/w_2)^{1/3} = q \implies \boxed{z_1(w, q) = q^{3/2} \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{1/2}, \quad z_2(w, q) = q^{3/2} \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{1/2}.}$$

(b) El costo mínimo es

$$c(w, q) = w_1 z_1 + w_2 z_2 = q^{3/2} [(w_1 w_2)^{1/2} + (w_1 w_2)^{1/2}]$$

Función de costos

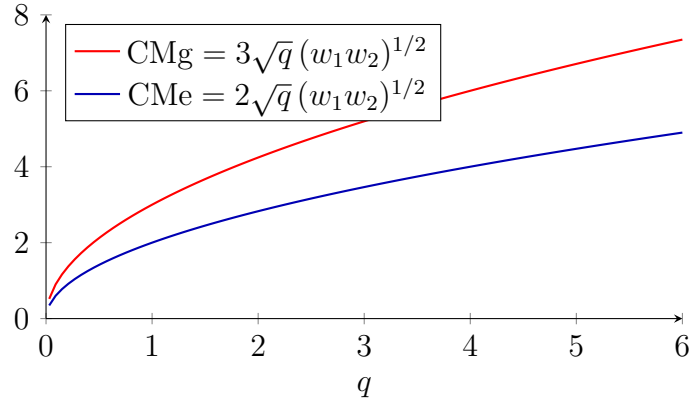
$$c(w, q) = 2 q^{3/2} (w_1 w_2)^{1/2}.$$

(c) $\frac{\partial c}{\partial w_1} = 2q^{3/2} \cdot \frac{1}{2} w_1^{-1/2} w_2^{1/2} = q^{3/2} \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{1/2} = z_1(w, q)$. Se verifica el lema de Shephard (análogamente para z_2).

(d) Con w fijo,

$$CMg(q) = \frac{\partial c}{\partial q} = 3 q^{1/2} (w_1 w_2)^{1/2}, \quad CMe(q) = \frac{c}{q} = 2 q^{1/2} (w_1 w_2)^{1/2}.$$

Ambos son crecientes en q y $CMg > CMe$ para todo $q > 0$: el costo medio es *estrictamente creciente* (no tiene forma de U, pues no hay costo fijo). Esto es consecuencia directa de los rendimientos decrecientes (f homogénea de grado $2/3 < 1$): c es convexa en q ($c \propto q^{3/2}$), por lo que producir más cuesta proporcionalmente más.



Con $(w_1w_2)^{1/2} = 1$: ambas curvas son crecientes y $\text{CMg} > \text{CMe}$; al no haber costo fijo, no hay forma de U.

■

4. De la función de costos a la tecnología: dualidad.

(a) Escribimos $c(w, q) = qh(w)$ con $h(w) = (\sqrt{w_1} + \sqrt{w_2})^2 = w_1 + w_2 + 2\sqrt{w_1w_2}$. Homogeneidad: $h(\lambda w) = (\sqrt{\lambda w_1} + \sqrt{\lambda w_2})^2 = \lambda(\sqrt{w_1} + \sqrt{w_2})^2 = \lambda h(w)$, de modo que $c(\lambda w, q) = \lambda c(w, q)$: homogénea de grado 1 en w . Monotonía: $\frac{\partial c}{\partial w_1} = q(1 + \sqrt{w_2/w_1}) \geq 0$ y, simétricamente, $\frac{\partial c}{\partial w_2} \geq 0$; además $\frac{\partial c}{\partial q} = h(w) \geq 0$. No decreciente en w y en q . Concavidad en w : la Hessiana de h es

$$D_w^2 h = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} w_1^{-3/2} w_2^{1/2} & \frac{1}{2} (w_1 w_2)^{-1/2} \\ \frac{1}{2} (w_1 w_2)^{-1/2} & -\frac{1}{2} w_1^{1/2} w_2^{-3/2} \end{pmatrix},$$

con $\partial^2 h / \partial w_1^2 < 0$ y $\det D_w^2 h = \frac{1}{4}(w_1 w_2)^{-1} - \frac{1}{4}(w_1 w_2)^{-1} = 0$: semidefinida negativa. Por tanto h , y con ella c , es cóncava en w .

(b) Por el lema de Shephard,

$$z_1(w, q) = \frac{\partial c}{\partial w_1} = q \left(1 + \sqrt{\frac{w_2}{w_1}} \right), \quad z_2(w, q) = \frac{\partial c}{\partial w_2} = q \left(1 + \sqrt{\frac{w_1}{w_2}} \right).$$

(c) De (b), $\frac{z_1}{q} - 1 = \sqrt{w_2/w_1}$ y $\frac{z_2}{q} - 1 = \sqrt{w_1/w_2}$, cuyo producto es 1:

$$\left(\frac{z_1}{q} - 1 \right) \left(\frac{z_2}{q} - 1 \right) = 1 \implies \frac{z_1 z_2}{q^2} - \frac{z_1 + z_2}{q} = 0 \implies q = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}.$$

Tecnología recuperada

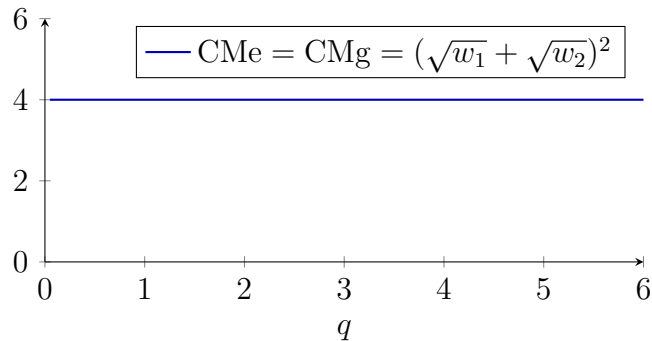
$$f(z_1, z_2) = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} = (z_1^{-1} + z_2^{-1})^{-1}.$$

Es una tecnología CES (con $\rho = -1$): los insumos son sustitutos imperfectos y se requiere una cantidad positiva de ambos para producir.

(d) f es homogénea de grado 1: $f(\lambda z) = \frac{\lambda^2 z_1 z_2}{\lambda(z_1 + z_2)} = \lambda f(z)$, esto es, *rendimientos constantes a escala*. Coherentemente, c es lineal en q , por lo que

$$\text{CMe}(q) = \frac{c}{q} = (\sqrt{w_1} + \sqrt{w_2})^2 = \frac{\partial c}{\partial q} = \text{CMg}(q),$$

ambos independientes de q : el costo medio es constante e igual al costo marginal, como corresponde a una tecnología con rendimientos constantes a escala.



Con $w_1 = w_2 = 1$, $(\sqrt{w_1} + \sqrt{w_2})^2 = 4$: costo medio y marginal constantes y coincidentes, como corresponde a rendimientos constantes a escala.

■ 5. Rendimientos a escala y forma de la función de costos.

(a) Si f es homogénea de grado 1, los conjuntos de requerimiento de insumos escalan: $\{z : f(z) \geq tq\} = t\{z : f(z) \geq q\}$ para $t > 0$. En efecto, si $f(z) \geq q$ entonces $f(tz) = tf(z) \geq tq$. Por tanto, si $z^*(w, q)$ minimiza el costo para producir q , entonces $tz^*(w, q)$ es factible y óptimo para producir tq , y

$$c(w, tq) = w \cdot (tz^*(w, q)) = tc(w, q).$$

Tomando $t = 1/q$: $c(w, q) = qc(w, 1)$. El costo medio $\text{CMe} = c/q = c(w, 1)$ no depende de q (es constante).

(b) Para $f(z_1, z_2) = z_1^a z_2^b$, que es homogénea de grado $a + b$:

$a + b > 1$: rendimientos crecientes; $a + b = 1$: constantes; $a + b < 1$: decrecientes.

(c) Bajo rendimientos decrecientes, duplicar todos los insumos produce *menos* del doble; equivalentemente, para duplicar el producto se requiere *más* del doble de insumos, de modo que el costo total más que se duplica y el costo medio crece. En el ejercicio 3, $a + b = 2/3 < 1$ y, en efecto, $c \propto q^{3/2}$ con $\text{CMe} \propto q^{1/2}$ creciente. ■

6. Equilibrio competitivo con costos cúbicos.

(a) Con $C(q) = 9000 + 15700q - 50q^2 + q^3$:

$$\text{CMe}(q) = \frac{9000}{q} + 15700 - 50q + q^2, \quad \text{CVMe}(q) = 15700 - 50q + q^2,$$

$$\text{CMg}(q) = 15700 - 100q + 3q^2.$$

(b) En el equilibrio de largo plazo el precio iguala al mínimo del costo medio, donde $\text{CMg} = \text{CMe}$:

$$15700 - 100q + 3q^2 = \frac{9000}{q} + 15700 - 50q + q^2 \implies 2q^2 - 50q = \frac{9000}{q}.$$

Multiplicando por q : $2q^3 - 50q^2 - 9000 = 0$, es decir $q^3 - 25q^2 - 4500 = 0$. Se verifica que $q = 30$ es raíz: $30^3 - 25 \cdot 30^2 - 4500 = 27000 - 22500 - 4500 = 0$. Luego la escala eficiente mínima es $q^* = 30$ y

$$p^* = \text{CMe}(30) = \frac{9000}{30} + 15700 - 50 \cdot 30 + 30^2 = 300 + 15700 - 1500 + 900 = 15400.$$

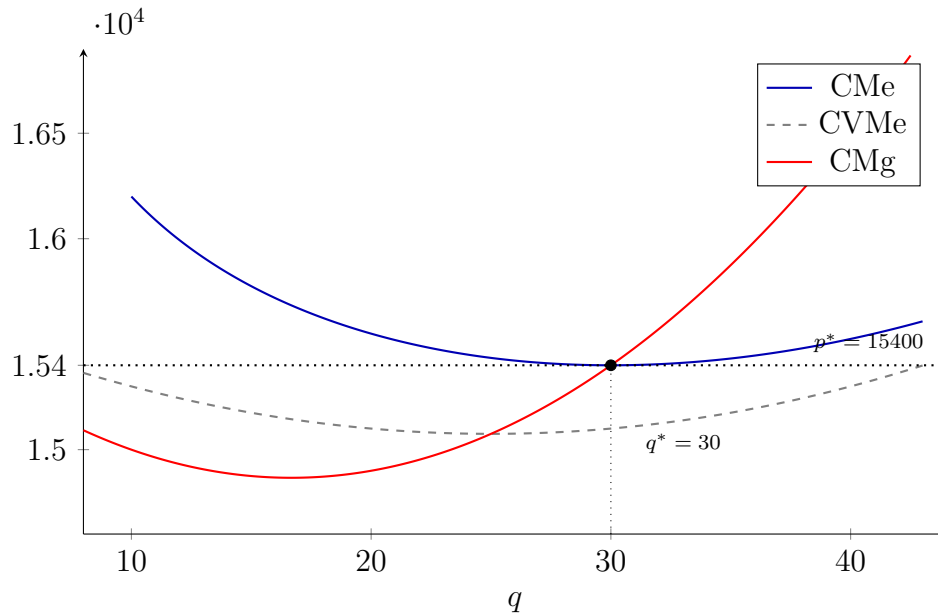
(Verificación: $\text{CMg}(30) = 15700 - 3000 + 2700 = 15400 = p^*$.)

(c) De la demanda de mercado $p = 40000 - Q$:

$$Q^* = 40000 - 15400 = 24600, \quad n^* = \frac{Q^*}{q^*} = \frac{24600}{30} = 820.$$

Equilibrio competitivo de largo plazo

$$q^* = 30, \quad p^* = 15400, \quad Q^* = 24600, \quad n^* = 820.$$



El costo marginal corta a CVMe en su mínimo ($q = 25$) y a CMe en su mínimo ($q = 30$), donde se fija $p^* = 15400$.

(d) Beneficio de cada empresa: ingreso = $15400 \cdot 30 = 462000$; costo = $9000 + 15700 \cdot 30 - 50 \cdot 900 + 27000 = 9000 + 471000 - 45000 + 27000 = 462000$. Luego $\pi = 0$. *Mecanismo.* Si $p > \text{CMe}_{\min}$ hay beneficios positivos, lo que atrae entrada; al aumentar n crece la oferta agregada y el precio cae. Si $p < \text{CMe}_{\min}$ hay pérdidas y ocurre salida. El proceso se detiene exactamente cuando $p = \text{CMe}_{\min}$ y $\pi = 0$ para cada empresa. ■

Ejercicios propuestos

7. Producto marginal, producto medio y máximo técnico.

Para la tecnología de *Stark Industries*, $q = 50L - 2L^2 - 10$:

$$PMg_L = \frac{dq}{dL} = 50 - 4L, \quad PMe_L = \frac{q}{L} = 50 - 2L - \frac{10}{L}.$$

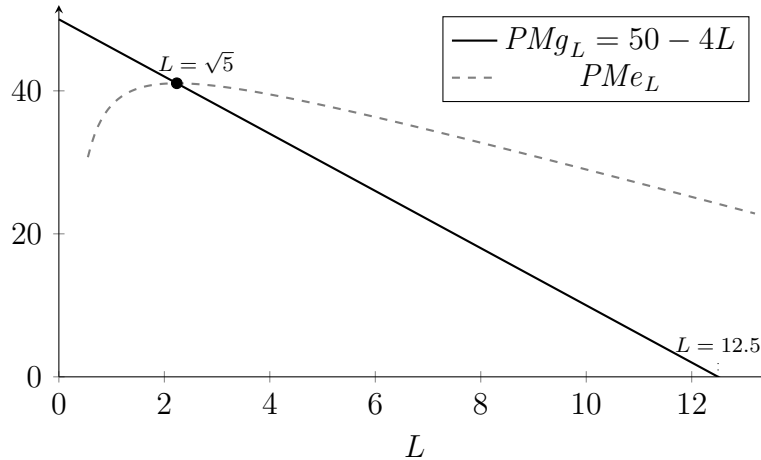
Cruce $PMg_L = PMe_L$:

$$50 - 4L = 50 - 2L - \frac{10}{L} \implies -2L = -\frac{10}{L} \implies 2L^2 = 10 \implies L = \sqrt{5} \approx 2.24.$$

Este es precisamente el punto donde el PMe_L alcanza su máximo (el PMg corta al PMe en su cúspide).

Máximo técnico ($PMg_L = 0$, producto total máximo):

$$50 - 4L = 0 \implies L = 12.5.$$



A $L = 12.5$ la firma obtiene el producto máximo: $q(12.5) = 50(12.5) - 2(12.5)^2 - 10 = 302.5$.

■

8. Producto marginal del trabajo y capital.

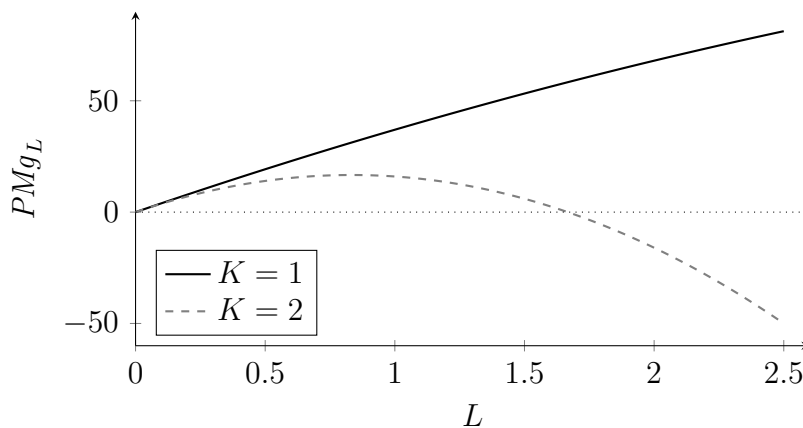
Para la tecnología de *Kamino Factories*, $q = 10K + 20L^2 - K^3L^3$:

$$PMg_L = \frac{\partial q}{\partial L} = 40L - 3K^3L^2.$$

El efecto del capital sobre el producto marginal del trabajo es

$$\frac{\partial PMg_L}{\partial K} = -9K^2L^2.$$

Como $K^2L^2 > 0$ para todo $K, L > 0$, se tiene $\partial PMg_L / \partial K < 0$: *el producto marginal del trabajo se reduce cuando crece el capital*. En esta tecnología capital y trabajo son sustitutos en el margen (el término de interacción $-K^3L^3$ penaliza el uso simultáneo intensivo de ambos), de modo que más capital vuelve menos productiva a la última unidad de trabajo.



Al pasar de $K = 1$ a $K = 2$ la curva de PMg_L se desplaza hacia abajo en todo nivel de L . ■

9. TMST y estudio en conjunto.

(a) Con $S_{Al} = 10A^{0.65}R^{0.35}$ (Alonso) y $S_{Is} = 10A^{0.4}R^{0.6}$ (Isabella), la TMST entre auditorías y regulaciones es $TMST = PMg_A/PMg_R$:

$$TMST^{Al} = \frac{6.5 A^{-0.35} R^{0.35}}{3.5 A^{0.65} R^{-0.65}} = \frac{6.5}{3.5} \frac{R}{A}, \quad TMST^{Is} = \frac{4 A^{-0.6} R^{0.6}}{6 A^{0.4} R^{-0.4}} = \frac{2}{3} \frac{R}{A}.$$

Ambas son proporcionales a R/A , de modo que serían iguales sólo si $6.5/3.5 = 2/3$, lo cual es falso ($6.5/3.5 \approx 1.86 > 0.67$). Por tanto las TMST *nunca coinciden* para $A, R > 0$: Alonso siempre tiene la TMST más alta, es decir, para cualquier proporción dada R/A necesita leer más regulaciones para compensar la pérdida de una unidad de auditoría.

(b) Ahora $S_{Al} = 10A^{0.65}R^{0.35} + G^{0.5}$ y $S_{Is} = 10A^{0.4}R^{0.6} + G^{0.5}$, con $PMg_G = 0.5G^{-0.5}$ para ambos. La TMST entre G y el método preferido (regulaciones para Alonso, auditorías para Isabella) mide cuánto de ese método se sacrifica por una unidad de estudio conjunto:

$$TMST_{G,R}^{Al} = \frac{PMg_G}{PMg_R} = \frac{0.5 G^{-0.5}}{3.5 A^{0.65} R^{-0.65}}, \quad TMST_{G,A}^{Is} = \frac{PMg_G}{PMg_A} = \frac{0.5 G^{-0.5}}{4 A^{-0.6} R^{0.6}}.$$

No podemos determinar en general quién está dispuesto a renunciar a más de su método preferido: las dos tasas están expresadas en unidades de bienes distintos (regulaciones para Alonso, auditorías para Isabella) y dependen de los niveles de A , R y G que cada uno elija. Sólo sustituyendo asignaciones específicas en cada TMST puede compararse numéricamente quién sacrifica más. ■

10. Equilibrio competitivo: tecnologías convexas y no convexas. (*)

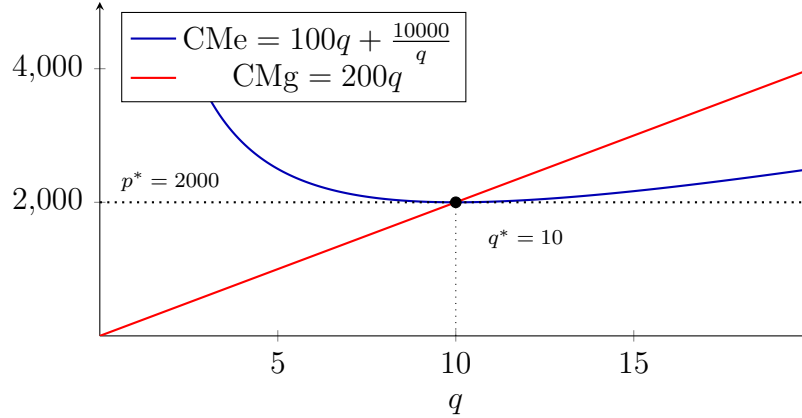
(a) $C(q) = 15700q + 50q^2$: $CMe(q) = 15700 + 50q$, $CMg(q) = 15700 + 100q$. El costo medio es estrictamente creciente en q , con ínfimo 15700 alcanzado solo cuando $q \rightarrow 0$. No existe una escala eficiente mínima interior: cada empresa querría producir una cantidad arbitrariamente pequeña, lo que requeriría un número infinito de empresas $n \rightarrow \infty$. El equilibrio competitivo de largo plazo no queda bien definido: sin costo fijo y con costo estrictamente convexo, el “tamaño óptimo de planta” colapsa a cero.

(b) $C(q) = 100q^2 + 10000$, $q > 0$. $CMe(q) = 100q + 10000/q$. Minimizando, $100 - 10000/q^2 = 0 \Rightarrow q = 10$, con $CMe(10) = 1000 + 1000 = 2000$ (y $CMg(10) = 200 \cdot 10 = 2000$, confirma el mínimo). Luego $p^* = 2000$. De $p = 10000 - Q$: $Q^* = 8000$ y $n^* = Q^*/q^* = 800$.

Equilibrio del caso (b)

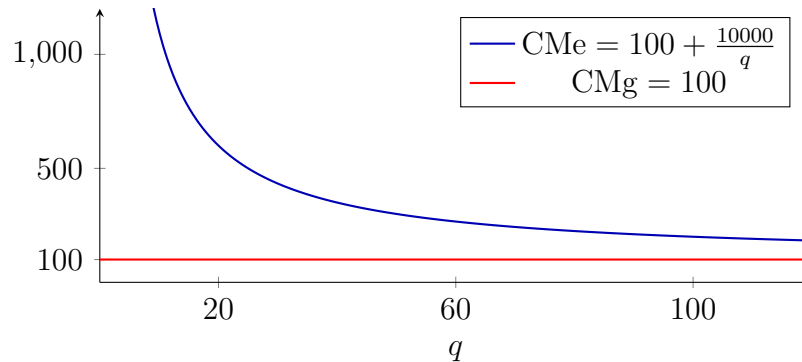
$$q^* = 10, \quad p^* = 2000, \quad Q^* = 8000, \quad n^* = 800.$$

Beneficio: ingreso = $2000 \cdot 10 = 20000$; costo = $100 \cdot 100 + 10000 = 20000$; $\pi = 0$. ✓



Caso (b): CMe en forma de U con mínimo en $q = 10$, donde $CMg = CMe = 2000 = p^*$.

(c) $C(q) = 100q + 10000$, $q > 0$. $CMe(q) = 100 + 10000/q$ es *decreciente* para todo q y tiende a $CMg = 100$ cuando $q \rightarrow \infty$. Con costo medio decreciente en todo el rango (rendimientos crecientes/economías de escala globales), una empresa grande siempre tiene menor costo medio: la tecnología es incompatible con la competencia perfecta (tiende al monopolio natural) y no existe un precio de tomador de precios que sostenga beneficio nulo con muchas empresas.



Caso (c): CMe decreciente en todo el rango, con asíntota $CMg = 100$; no hay escala eficiente mínima (incompatible con competencia perfecta).

(d) El término 10000 puede interpretarse como un costo *cuasi-fijo* (de puesta en marcha o de presencia en el mercado), nulo si $q = 0$ y por tanto evitable: no es un costo hundido. En el largo plazo con libre entrada no contradice la ausencia de costos hundidos, pues se recupera exactamente al precio de beneficio nulo, y es lo que genera una escala eficiente mínima interior ($q = 10$ en (b)). ■

11. Maximización de beneficios con tecnología Cobb-Douglas.

(a) Para $\lambda > 0$,

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = (\lambda x_1)^{1/3} (\lambda x_2)^{1/3} = \lambda^{2/3} x_1^{1/3} x_2^{1/3} = \lambda^{2/3} f(x_1, x_2),$$

de modo que f es homogénea de grado $2/3 < 1$: la tecnología exhibe *rendimientos decrecientes a escala*. Con $a+b = 2/3 < 1$, la función Cobb-Douglas es estrictamente cóncava en el ortante positivo, por lo que el objetivo $pf(x) - w \cdot x$ es estrictamente cóncavo y posee un único máximo interior (el beneficio no se dispara al escalar insumos, a diferencia del caso de rendimientos constantes o crecientes).

(b) Condiciones de primer orden (el valor del producto marginal iguala al precio del insumo):

$$\frac{1}{3} p x_1^{-2/3} x_2^{1/3} = w_1, \quad \frac{1}{3} p x_1^{1/3} x_2^{-2/3} = w_2.$$

Dividiendo una entre otra se obtiene la condición de tangencia $x_2/x_1 = w_1/w_2$, es decir $x_2 = (w_1/w_2)x_1$. Sustituyendo en la primera CPO:

$$\frac{1}{3} p (w_1/w_2)^{1/3} x_1^{-1/3} = w_1 \implies x_1^{1/3} = \frac{p}{3 w_1^{2/3} w_2^{1/3}}.$$

Elevando al cubo y usando la simetría,

Demandas de insumos y oferta

$$x_1(p, w) = \frac{p^3}{27 w_1^2 w_2}, \quad x_2(p, w) = \frac{p^3}{27 w_1 w_2^2}, \quad y(p, w) = x_1^{1/3} x_2^{1/3} = \frac{p^2}{9 w_1 w_2}.$$

(c) Derivando,

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial p} &= \frac{2p}{9 w_1 w_2} > 0, & \frac{\partial x_1}{\partial w_1} &= -\frac{2p^3}{27 w_1^3 w_2} < 0, \\ \frac{\partial x_1}{\partial w_2} &= -\frac{p^3}{27 w_1^2 w_2^2} < 0, & \frac{\partial x_1}{\partial p} &= \frac{p^2}{9 w_1^2 w_2} > 0. \end{aligned}$$

Interpretación. La oferta es creciente en el precio del producto (ley de la oferta). La demanda de un insumo es decreciente en su propio precio. Aquí también es decreciente en el precio del otro insumo: al encarecerse x_2 cae la producción óptima y con ella el uso de ambos insumos (efecto escala dominante). Un aumento de p eleva la demanda de insumos al hacer más rentable producir.

(d) Sustituyendo,

$$\pi(p, w) = p \frac{p^2}{9 w_1 w_2} - w_1 \frac{p^3}{27 w_1^2 w_2} - w_2 \frac{p^3}{27 w_1 w_2^2} = \frac{p^3}{9 w_1 w_2} - \frac{2p^3}{27 w_1 w_2} = \frac{p^3}{27 w_1 w_2}.$$

Entonces $\pi(\lambda p, \lambda w_1, \lambda w_2) = \frac{(\lambda p)^3}{27(\lambda w_1)(\lambda w_2)} = \frac{\lambda^3}{\lambda^2} \pi(p, w) = \lambda \pi(p, w)$: homogénea de grado 1.

■

12. Propiedades de la función de beneficios y lema de Hotelling.

(a) **Homogeneidad de grado 1.** Para $\lambda > 0$, escalar todos los precios escala el objetivo en cada y sin alterar el argumento maximizante:

$$\pi(\lambda p) = \max_{y \in Y} (\lambda p) \cdot y = \lambda \max_{y \in Y} p \cdot y = \lambda \pi(p).$$

(b) Convexidad. Sean $p', p'' \gg 0$, $\alpha \in [0, 1]$ y $p = \alpha p' + (1 - \alpha)p''$. Sea $y^* = y(p)$ óptimo a precios p . Como $y^* \in Y$ es factible (aunque no necesariamente óptimo) a p' y a p'' :

$$\pi(p) = p \cdot y^* = \alpha (p' \cdot y^*) + (1 - \alpha)(p'' \cdot y^*) \leq \alpha \pi(p') + (1 - \alpha) \pi(p''),$$

pues $p' \cdot y^* \leq \pi(p')$ y $p'' \cdot y^* \leq \pi(p'')$ por optimalidad de $\pi(\cdot)$. Luego π es convexa.

(c) Lema de Hotelling. Por definición $\pi(p) = p \cdot y(p)$. Derivando respecto a p_ℓ :

$$\frac{\partial \pi}{\partial p_\ell} = y_\ell(p) + p \cdot \frac{\partial y}{\partial p_\ell}.$$

Como $y(p)$ maximiza $p \cdot y$ sobre Y , las condiciones de optimalidad implican $p \cdot \partial y / \partial p_\ell = 0$ (teorema de la envolvente: el cambio de y inducido por p_ℓ no altera el valor en el óptimo).

Por tanto

$$y_\ell(p) = \frac{\partial \pi}{\partial p_\ell}(p), \quad \text{es decir } y(p) = \nabla \pi(p).$$

(d) De (c), $D_p y(p) = D_p \nabla \pi(p) = D_p^2 \pi(p)$ es la Hessiana de π . Por el teorema de Young es *simétrica*, y por la convexidad de (b) es *semidefinida positiva*. Además, como π es homogénea de grado 1, su gradiente $y = \nabla \pi$ es homogéneo de grado 0; aplicando el teorema de Euler a cada y_ℓ ,

$$\sum_j p_j \frac{\partial y_\ell}{\partial p_j} = 0 \quad \forall \ell \implies D_p y(p) p = 0.$$

Interpretación. Como la matriz es semidefinida positiva, sus elementos diagonales son no negativos: $\partial y_\ell / \partial p_\ell \geq 0$. Esto es la *ley de la oferta*: la oferta neta de cada bien es no decreciente en su propio precio (un output se ofrece más cuando sube su precio; un input se usa menos cuando sube su precio, lo que también eleva la oferta neta, que es negativa). ■

13. De la función de beneficios a las ofertas netas: WAPM y ley de la oferta. (*)

(a) Lema de Hotelling con $\pi(p_1, p_2) = p_2^2 / (4p_1)$:

$$y_1(p) = \frac{\partial \pi}{\partial p_1} = -\frac{p_2^2}{4p_1^2} < 0 \text{ (insumo)}, \quad y_2(p) = \frac{\partial \pi}{\partial p_2} = \frac{p_2}{2p_1} > 0 \text{ (producto)}.$$

(b) Sea $z = -y_1 = p_2^2 / (4p_1)$ la cantidad de insumo. Como $y_2 = p_2 / (2p_1)$, se tiene $z = (p_2 / (2p_1))^2 = y_2^2$, es decir

$$y_2 = \sqrt{z} = \sqrt{-y_1} \implies f(z) = z^{1/2}.$$

La tecnología $f(z) = z^{1/2}$ es homogénea de grado $1/2 < 1$: rendimientos decrecientes a escala.

(c) La matriz de sustitución es

$$D_p y(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial p_1} & \frac{\partial y_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial p_1} & \frac{\partial y_2}{\partial p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_2^2}{2p_1^3} & -\frac{p_2}{2p_1^2} \\ -\frac{p_2}{2p_1^2} & \frac{1}{2p_1} \end{pmatrix}.$$

Es *simétrica* (las entradas cruzadas coinciden). Los elementos diagonales son positivos y el determinante es

$$\frac{p_2^2}{2p_1^3} \cdot \frac{1}{2p_1} - \frac{p_2^2}{4p_1^4} = \frac{p_2^2}{4p_1^4} - \frac{p_2^2}{4p_1^4} = 0,$$

de modo que es *semidefinida positiva* (autovalores ≥ 0 , uno nulo). Finalmente,

$$D_p y(p) p = \begin{pmatrix} \frac{p_2^2}{2p_1^3} p_1 - \frac{p_2}{2p_1^2} p_2 \\ -\frac{p_2}{2p_1^2} p_1 + \frac{1}{2p_1} p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(d) **WAPM.** Sean $y' = y(p')$ y $y'' = y(p'')$. Por optimalidad, $p' \cdot y' \geq p' \cdot y''$ y $p'' \cdot y'' \geq p'' \cdot y'$. Sumando,

$$p' \cdot y' + p'' \cdot y'' \geq p' \cdot y'' + p'' \cdot y' \implies (p' - p'') \cdot (y' - y'') \geq 0.$$

Si solo cambia p_2 (con $\Delta p_1 = 0$): $\Delta p_2 \Delta y_2 \geq 0$, es decir $\partial y_2 / \partial p_2 \geq 0$. Es la ley de la oferta. ■

14. Estática comparativa general. (*)

(a) Una función de producción “bien comportada” es: creciente en cada insumo ($f_i > 0$, productos marginales positivos); cóncava (Hessiana $D^2 f$ semidefinida negativa, reflejando productos marginales decrecientes); para garantizar un máximo interior único se pide $D^2 f$ *definida* negativa (condición de segundo orden, equivalente a rendimientos decrecientes locales).

(b) Las CPO son $F_i(x; p, w) \equiv p f_i(x) - w_i = 0$, $i = 1, 2$. Diferenciando el sistema y usando $H \equiv p D^2 f$ (definida negativa por la SOC):

$$H dx + \nabla f dp - dw = 0 \implies dx = H^{-1}(dw - \nabla f dp).$$

Entonces $\partial x / \partial w = H^{-1} = (p D^2 f)^{-1}$. Como H es definida negativa, H^{-1} también lo es, de donde los efectos propios quedan *firmados*: $\partial x_i / \partial w_i < 0$. Los efectos cruzados $\partial x_i / \partial w_j$ tienen el signo de la entrada cruzada de H^{-1} , que depende del signo de f_{12} y por ello son *ambiguos* en general. Para el precio, $\partial x / \partial p = -H^{-1} \nabla f$; con $\nabla f > 0$ el signo de $\partial x_i / \partial p$ depende nuevamente de la estructura de H^{-1} (es no negativo cuando los insumos son complementarios, $f_{12} \geq 0$).

(c) El objetivo $g(x; p) = p f(x) - w \cdot x$ tiene *diferencias crecientes* en (x_i, p) si $\partial^2 g / \partial x_i \partial p = f_i(x) \geq 0$, lo que se cumple por la monotonía de f . Es *supermodular* en (x_1, x_2) si $\partial^2 g / \partial x_1 \partial x_2 = p f_{12} \geq 0$, es decir si los insumos son complementarios ($f_{12} \geq 0$). Estas propiedades no requieren concavidad ni diferenciabilidad plena, solo la estructura de complementariedad.

(d) Por el teorema de Topkis (estática comparativa monótona): si g es supermodular en (x_1, x_2) y tiene diferencias crecientes en (x, p) , el conjunto de maximizadores es no decreciente en p , de modo que $\partial x_i / \partial p \geq 0$ *sin necesidad de diferenciar* y bajo el único supuesto $f_{12} \geq 0$. *Ventaja*: supuestos débiles, robustez ante no diferenciabilidad y soluciones de esquina. *Desventaja*: solo entrega la *dirección* del cambio (signo), no su magnitud, y exige estructura de retículo/complementariedad. El enfoque del teorema de la función implícita da magnitudes y todos los efectos cruzados, pero requiere diferenciabilidad, interioridad y concavidad. ■

15. Existencia de solución al problema de la empresa. (*)

(a) Para el consumidor, la continuidad de u sobre el conjunto presupuestal *compacto* basta (teorema de Weierstrass). En la empresa el conjunto factible $\{z \geq 0\}$ es *no acotado*, y la continuidad de f no impide que el beneficio sea no acotado. Ejemplo: $f(z) = z$ (lineal, continua); para $p > w$ se tiene $\pi = (p - w)z \rightarrow \infty$ cuando $z \rightarrow \infty$, sin máximo. (Otro: $f(z) = z^2$, donde $\pi = pz^2 - wz \rightarrow \infty$.)

(b) La convexidad de Y no garantiza solución. Sea $Y = \{(-z, q) : 0 \leq q \leq z\}$, el conjunto bajo la recta $q = z$ (tecnología lineal, convexa, con rendimientos constantes). Si el precio del producto supera al del insumo, el beneficio crece sin cota a lo largo de la frontera: no hay máximo. El problema es que Y contiene una semirrecta (dirección de recesión) sobre la cual los beneficios son positivos.

(c) La mejor condición suficiente *ajustada* es de tipo cono de recesión: Y cerrado y, para el vector de precios p dado, $p \cdot d \leq 0$ para toda dirección de recesión d de Y (no existe ninguna dirección factible no acotada que aumente el beneficio). Junto con libre disposición, esto asegura que el supremo es finito y se alcanza. Condiciones más fuertes pero simples: Y compacto, o rendimientos *estrictamente* decrecientes a escala (que acotan el beneficio).

(d) Si los dueños maximizan $U(\pi)$ con U estrictamente creciente, entonces $\arg \max U(\pi(y)) = \arg \max \pi(y)$, pues U es una transformación monótona: la elección de producción $y(p)$, la oferta, el lema de Hotelling y la homogeneidad de grado 0 de y *se mantienen sin cambio*. Lo que ya no aplica directamente es el análisis del *valor* (la convexidad de π en p no se traslada a $U(\pi)$). Bajo certeza, las predicciones de comportamiento son idénticas; solo cuando los beneficios son aleatorios y U es no lineal (actitud frente al riesgo) las predicciones difieren de la maximización de beneficios esperados. ■