

Microeconomía 1

Solucionario de la Práctica Dirigida 6

Profesor: José Gallardo Ku, Jefes de Práctica: Marcelo Gallardo y Raúl Amao.

Sección 1: Ejercicios para la PD

1. Consumo intertemporal en dos períodos.

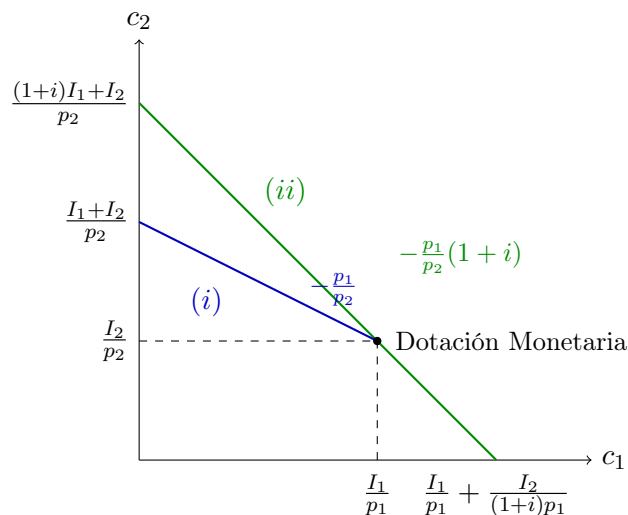
(a) En el escenario (i) sin endeudamiento, el agente puede a lo más gastar su ingreso del período 1 en consumo del período 1, y trasladar el remanente a $t = 2$ sin rendimiento. El conjunto factible es

$$p_1 c_1 + p_2 c_2 \leq I_1 + I_2, \quad p_1 c_1 \leq I_1.$$

La recta presupuestal tiene pendiente $-p_1/p_2$, intercepto vertical $(I_1+I_2)/p_2$ y está truncada en $c_1 = I_1/p_1$. En el escenario (ii) con mercado de capitales perfecto, la restricción intertemporal es

$$p_1 c_1 + \frac{p_2 c_2}{1+i} = I_1 + \frac{I_2}{1+i}.$$

La pendiente es $-(p_1/p_2)(1+i)$, los interceptos son $I_1/p_1 + I_2/[p_1(1+i)]$ en el eje c_1 y $[(1+i)I_1 + I_2]/p_2$ en el eje c_2 . Ambas rectas pasan por el punto de dotación $(I_1/p_1, I_2/p_2)$.

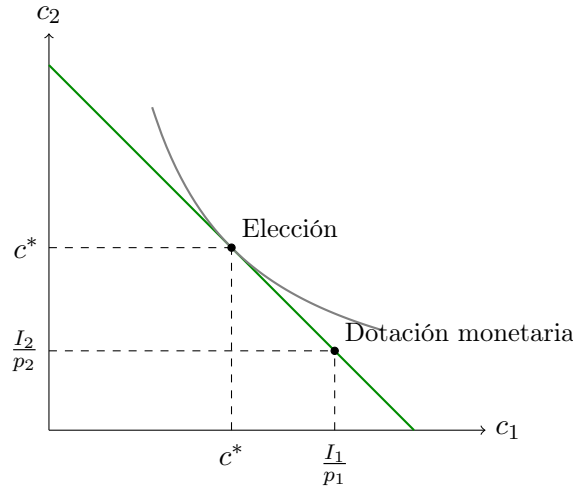


(b) El problema es

$$\max v(c_1) + \frac{1}{1+i} v(c_2) \quad \text{s.a.} \quad p_1 c_1 + \frac{p_2 c_2}{1+i} = I_1 + \frac{I_2}{1+i}.$$

Las CPO dan $v'(c_1)/[v'(c_2)/(1 + \phi)] = p_1(1 + i)/p_2$. Usando $p_2 = p_1(1 + \pi)$ y $1 + r = (1 + i)/(1 + \pi)$, la condición $c_1^* = c_2^*$ requiere $1 + \phi = (1 + i)/(1 + \pi) = 1 + r$, es decir, $r = \phi$. La tasa de interés real iguala la tasa de preferencia intertemporal.

(c) Si $r = \phi$, $c_1^* = c_2^* \equiv \bar{c}$. La dotación permite consumir $(I_1/p_1, I_2/p_2) = (I_1/p_1, I_2/[p_1(1 + \pi)])$. La condición $(1 + \pi)I_1 > I_2$ equivale a $I_1/p_1 > I_2/p_2$: la dotación de consumo es mayor en $t = 1$ que en $t = 2$. Para igualar el consumo en ambos períodos, el agente debe *ahorrar* parte de I_1 . El óptimo se ubica al sureste de $(I_1/p_1, I_2/p_2)$ a lo largo de la restricción intertemporal y en la línea de 45° del plano (c_1, c_2) (ajustada por precios).



(d) Con $v(c) = \ln c$:

$$\max \ln c_1 + \frac{1}{1 + \phi} \ln c_2 \quad \text{s.a.} \quad p_1 c_1 + \frac{p_2 c_2}{1 + i} = I_1 + \frac{I_2}{1 + i} \equiv I.$$

La condición de tangencia $(1 + \phi)c_2/c_1 = p_1(1 + i)/p_2$ y la restricción dan

$$\boxed{c_1^* = \frac{1 + \phi}{2 + \phi} \frac{I}{p_1}, \quad c_2^* = \frac{1 + i}{2 + \phi} \frac{I}{p_2}.$$

Si además $s_1 \equiv I_1 - p_1 c_1^* \geq 0$, la restricción de no endeudamiento es no vinculante y la solución no cambia. Si $s_1 < 0$ (deudor), el agente quisiera consumir más que I_1/p_1 en $t = 1$; al no permitirse, la restricción se vuelve vinculante y la solución óptima es la dotación:

$$c_1^* = I_1/p_1, \quad c_2^* = I_2/p_2.$$

(e) Manipulando las expresiones de (d):

$$\frac{\partial c_1^*}{\partial i} = -\frac{1 + \phi}{2 + \phi} \frac{I_2}{p_1(1 + i)^2} < 0, \quad \frac{\partial c_2^*}{\partial i} = \frac{I_1}{p_2(2 + \phi)} > 0,$$

$$\frac{\partial c_1^*}{\partial \phi} = \frac{(1+i)I_1 + I_2}{p_1(1+i)(2+\phi)^2} > 0, \quad \frac{\partial c_2^*}{\partial \phi} = -\frac{(1+i)I_1 + I_2}{p_2(2+\phi)^2} < 0.$$

Un aumento de la tasa de interés desplaza consumo hacia el período 2 (sustitución); un aumento de la impaciencia ϕ lo desplaza hacia el período 1.

2. Consumo intertemporal en tres períodos con utilidad logarítmica.

(a) Riqueza intertemporal $I = I_1 + I_2/(1+i) + I_3/(1+i)^2$. Igualando las CPO vía λ se obtiene, con $\delta \equiv (1+i)/(1+\phi)$,

$$\frac{1}{p_1 c_1} = \frac{(1+i)}{(1+\phi)p_2 c_2} = \frac{(1+i)^2}{(1+\phi)^2 p_3 c_3} \implies c_2 = \delta \frac{p_1}{p_2} c_1, \quad c_3 = \delta^2 \frac{p_1}{p_3} c_1.$$

Reemplazando en la restricción:

$$p_1 c_1 \left[1 + \frac{1}{1+\phi} + \frac{1}{(1+\phi)^2} \right] = I.$$

Definiendo $\Phi \equiv 1 + 1/(1+\phi) + 1/(1+\phi)^2$,

$$\boxed{c_1^* = \frac{I}{\Phi p_1}, \quad c_2^* = \frac{\delta I}{\Phi p_2}, \quad c_3^* = \frac{\delta^2 I}{\Phi p_3}.}$$

(b) Sea $dI_1 = dI_2 = dI_3 \equiv dI > 0$. Entonces

$$\sum dI = \left[1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} \right] dI_1 \equiv \Upsilon dI_1,$$

y

$$dc_1^* = \frac{\Upsilon}{\Phi p_1} dI_1, \quad dc_2^* = \frac{\delta \Upsilon}{\Phi p_2} dI_1, \quad dc_3^* = \frac{\delta^2 \Upsilon}{\Phi p_3} dI_1.$$

Un aumento permanente del ingreso eleva el consumo en los tres períodos, pero no de manera puntual: el incremento en cualquier c_t depende del cambio en la *riqueza intertemporal* I , que pondera el aumento por su valor presente. Así, el consumidor suaviza el shock permanente repartiendo el incremento entre los tres períodos según sus tasas relativas de impaciencia y descuento.

3. Consumo intertemporal CRRA en $T+1$ períodos (extensión).

(a) Lagrangiano y CPO:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^T \beta^t \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \lambda \left(W - \sum_{t=0}^T \frac{c_t}{(1+r)^t} \right), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = \beta^t c_t^{-\sigma} - \frac{\lambda}{(1+r)^t} = 0.$$

Tomando cocientes en t y $t + 1$,

$$\frac{\beta^t c_t^{-\sigma}}{\beta^{t+1} c_{t+1}^{-\sigma}} = \frac{1+r}{1} \implies \boxed{c_t^{-\sigma} = \beta(1+r) c_{t+1}^{-\sigma}}, \quad \text{es decir, } u'(c_t) = \beta(1+r) u'(c_{t+1}).$$

(b) Despejando el cociente:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = [\beta(1+r)]^{1/\sigma} \implies c_t = c_0 [\beta(1+r)]^{t/\sigma}.$$

El signo del crecimiento del consumo depende de $\beta(1+r) - 1$: si $\beta(1+r) > 1$, el agente desplaza consumo al futuro y la senda es creciente; si $\beta(1+r) < 1$, decreciente; si $\beta(1+r) = 1$, plana. La magnitud de la respuesta está regulada por $1/\sigma$, la *elasticidad de sustitución intertemporal*: σ grande \implies poca sustitución entre períodos (senda plana, suavizamiento fuerte); σ pequeño \implies mucha sustitución (senda muy sensible a r).

(c) Sustituyendo el perfil en la restricción:

$$\sum_{t=0}^T \frac{c_0 [\beta(1+r)]^{t/\sigma}}{(1+r)^t} = c_0 \sum_{t=0}^T R^t = W, \quad R \equiv \beta^{1/\sigma} (1+r)^{(1-\sigma)/\sigma}.$$

Sumando la progresión geométrica,

$$\boxed{c_0 = W \left(\frac{1-R}{1-R^{T+1}} \right)}.$$

En el límite $\sigma \rightarrow 1$: $R \rightarrow \beta(1+r)^0 = \beta$, y se recupera $c_0 = W(1-\beta)/(1-\beta^{T+1})$, el caso logarítmico. Para $T \rightarrow \infty$ (con $R < 1$): $c_0 \rightarrow W(1-R)$.

(d) Si $\beta(1+r) = 1$, entonces $[\beta(1+r)]^{1/\sigma} = 1$ y por (b) $c_t = c_0$ para todo t . Con $y_t = y$ constante, la restricción

$$c_0 \sum_{t=0}^T (1+r)^{-t} = y \sum_{t=0}^T (1+r)^{-t} \implies c_0 = y.$$

El agente consume su renta corriente en cada período.

4. Modelo de compra-venta: hogar campesino.¹

¹Convención de signos en Slutsky con dotación. Denotamos:

$$ES = \text{Efecto Sustitución}, \quad EIO = \text{Efecto Ingreso Ordinario}, \quad EID = \text{Efecto Ingreso Dotación},$$

con la descomposición $\Delta y_i = \Delta y_i^{ES} + \Delta y_i^{EIO} + \Delta y_i^{EID}$, donde

$$\Delta y_i^{ES} = h_i(\mathbf{p}^1, V^0) - y_i^0, \quad \Delta y_i^{EIO} = y_i(\mathbf{p}^1, I^0) - y_i(\mathbf{p}^1, m'), \quad \Delta y_i^{EID} = y_i(\mathbf{p}^1, I^1) - y_i(\mathbf{p}^1, I^0),$$

y $m' = e(\mathbf{p}^1, V^0)$, $I^0 = \mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{w}^E$, $I^1 = \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{w}^E$.

(a) Con $u = \ln x + y$ e ingreso pleno $I = p_x x^E + p_y y^E + I_0$, las CPO marshallianas dan

$$\frac{1/x}{1} = \frac{p_x}{p_y} \implies \boxed{x^*(\mathbf{p}) = \frac{p_y}{p_x}}, \quad p_y y^* = I - p_x x^* = I - p_y \implies \boxed{y^*(\mathbf{p}, I) = \frac{I}{p_y} - 1.}$$

La utilidad indirecta:

$$v(\mathbf{p}, I) = \ln\left(\frac{p_y}{p_x}\right) + \frac{I}{p_y} - 1.$$

Invirtiendo $v = \bar{u}$ para la función de gasto:

$$e(\mathbf{p}, \bar{u}) = [\bar{u} + 1 - \ln(p_y/p_x)] p_y = [\bar{u} + 1 - \ln p_y + \ln p_x] p_y.$$

Por Shephard:

$$\boxed{x^h(\mathbf{p}, \bar{u}) = \frac{\partial e}{\partial p_x} = \frac{p_y}{p_x}, \quad y^h(\mathbf{p}, \bar{u}) = \frac{\partial e}{\partial p_y} = \bar{u} + \ln(p_x/p_y).}$$

Nota: $x^h = x^*$ porque la utilidad es cuasilineal en y (no hay efecto ingreso sobre x).

(b) Slutsky con dotación: $\partial y_i / \partial p_x |_{\text{walras}} = \partial h_i / \partial p_x + (x^E - x^*) \partial y_i / \partial I$.

Para x : $\partial x^* / \partial p_x = -p_y / p_x^2$, $\partial x^h / \partial p_x = -p_y / p_x^2$, $\partial x^* / \partial I = 0$ (cuasilinealidad). Luego

$$\underbrace{-\frac{p_y}{p_x^2}}_{ET} = \underbrace{-\frac{p_y}{p_x^2}}_{ES} \underbrace{-0}_{EIO} + \underbrace{0}_{EID}.$$

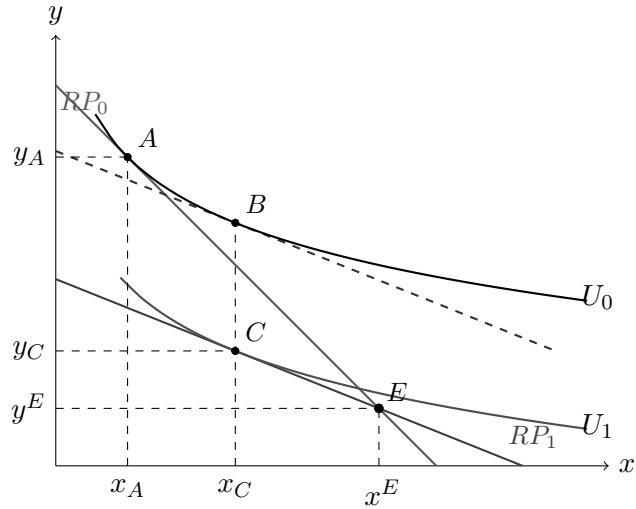
La demanda de papa solo responde al efecto sustitución.

Para y : $\partial y^* / \partial I = 1/p_y$, $\partial y^h / \partial p_x = 1/p_x$ (de la hicksiana). El efecto total walrasiano $\partial y^* / \partial p_x |_{\text{walras}} = x^E / p_y$ (derivando $y^* = (p_x x^E + p_y y^E + I_0) / p_y - 1$ respecto a p_x). Luego

$$\underbrace{\frac{x^E}{p_y}}_{ET} = \underbrace{\frac{1}{p_x}}_{ES} \underbrace{-\frac{x^*}{p_y}}_{EIO} + \underbrace{\frac{x^E}{p_y}}_{EID}.$$

Sustituyendo $x^* = p_y / p_x$: $1/p_x - (p_y/p_x)/p_y + x^E/p_y = 1/p_x - 1/p_x + x^E/p_y = x^E/p_y$. Los efectos ES y EIO sobre y se cancelan; la variación neta proviene del EID .

(c) Ante una reducción de p_x , manteniendo la utilidad inicial, el ES aumenta el consumo de papa (movimiento $A \rightarrow B$ sobre U_0). El EIO es *nulo* sobre x porque la demanda de papa no depende del ingreso (cuasilinealidad), pero reduce el consumo de arroz al ajustar el poder de compra. El EID reduce el ingreso pleno del hogar (es vendedor neto de papa y su producción vale menos al caer p_x); como la demanda de papa no depende del ingreso, todo el ajuste por dotación recae sobre el arroz. En síntesis: la demanda de papa solo se ve afectada por el ES ; la demanda de arroz refleja $EIO + EID$.

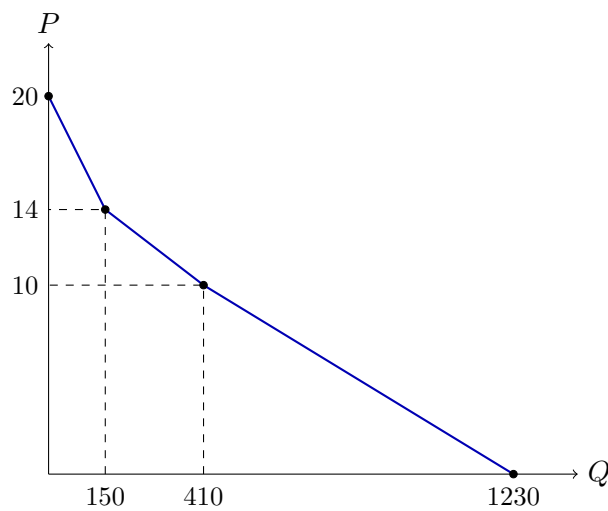


5. Demanda agregada: empresa de transporte.

(a) Los precios de reserva son $P_c^R = 170/17 = 10$, $P_s^R = 560/40 = 14$, $P_a^R = 500/25 = 20$.
Sumando horizontalmente:

$$Q^d(P) = \begin{cases} 1230 - 82P, & 0 \leq P \leq 10, \\ 1060 - 65P, & 10 < P \leq 14, \\ 500 - 25P, & 14 < P \leq 20, \\ 0, & P > 20. \end{cases}$$

La gráfica en el plano (Q, P) es una poligonal decreciente con quiebres en $P = 10$, $P = 14$ y $P = 20$. Continuidad: en $P = 10$, $1230 - 820 = 410 = 1060 - 650$; en $P = 14$, $1060 - 910 = 150 = 500 - 350$.



(b) La elasticidad precio es $\varepsilon = (dQ/dP)(P/Q)$.

Para $P = 5$ se está en el primer tramo, $Q = 1230 - 82(5) = 820$:

$$\varepsilon(5) = -82 \cdot \frac{5}{820} = -\frac{1}{2}.$$

La demanda es inelástica: un aumento de 1% en el precio reduce la cantidad demandada en 0.5%.

Para $P = 16$ se está en el tercer tramo, $Q = 500 - 25(16) = 100$:

$$\varepsilon(16) = -25 \cdot \frac{16}{100} = -4.$$

La demanda es elástica: un aumento de 1% en el precio reduce la cantidad demandada en 4%. La diferencia refleja que a precios altos solo los agricultores permanecen en el mercado, con menor sensibilidad agregada.

Sección 2: Ejercicios para la casa

6. Consumo intertemporal cuadrático, certeza equivalente y caminata aleatoria.

(a) CPO: $\beta^t u'(c_t) = \lambda/(1+r)^t$. Con $\beta(1+r) = 1$, $u'(c_t) = \lambda$ constante, luego $1 - \gamma c_t = 1 - \gamma c_{t+1}$ y $c_0 = c_1 = c_2 \equiv \bar{c}$. La restricción $\bar{c} \sum_{t=0}^2 (1+r)^{-t} = W$ da

$$\bar{c} = \frac{W}{1 + (1+r)^{-1} + (1+r)^{-2}}.$$

(b) La ecuación de Euler $u'(c_t) = \beta(1+r) \mathbb{E}_t[u'(c_{t+1})]$, con $\beta(1+r) = 1$ y $u'(c) = 1 - \gamma c$ lineal:

$$1 - \gamma c_t = \mathbb{E}_t[1 - \gamma c_{t+1}] = 1 - \gamma \mathbb{E}_t[c_{t+1}] \implies \mathbb{E}_t[c_{t+1}] = c_t.$$

$\{c_t\}$ es una martingala respecto a $\{\mathcal{F}_t\}$.

(c) Por la ley de esperanzas condicionales iteradas, $\mathbb{E}_0[c_2] = \mathbb{E}_0[\mathbb{E}_1[c_2]] = \mathbb{E}_0[c_1] = c_0$. La restricción intertemporal en valor esperado (con $r = 0$ por simplicidad):

$$c_0 + \mathbb{E}_0[c_1] + \mathbb{E}_0[c_2] = y_0 + y_1 + \bar{y}_2 \implies 3c_0 = y_0 + y_1 + \bar{y}_2 \implies c_0 = \frac{y_0 + y_1 + \bar{y}_2}{3}.$$

Idéntico al caso determinista bajo el reemplazo $y_2 \mapsto \bar{y}_2$ (certeza equivalente).

(d) CRRA: $u'(c) = c^{-\sigma}$, $u'''(c) = \sigma(\sigma+1)c^{-\sigma-2} > 0$. Como u' es convexa, Jensen aplicada a $u'(c_t) = \mathbb{E}_t[u'(c_{t+1})]$ da

$$u'(c_t) = \mathbb{E}_t[u'(c_{t+1})] \geq u'(\mathbb{E}_t[c_{t+1}]).$$

u' estrictamente decreciente implica $c_t \leq \mathbb{E}_t[c_{t+1}]$, estricta si $\text{Var}_t(c_{t+1}) > 0$. El agente ahorra más hoy frente al riesgo (*ahorro precautorio*, ausente en la cuadrática porque $u'''_{\text{cuad}} \equiv 0$).

7. Ecuación de Slutsky con dotación y aplicación CES.

(a) De $\tilde{x}_i(\mathbf{p}, \mathbf{w}) = x_i(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{w})$:

$$\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} + w_j \frac{\partial x_i}{\partial I}.$$

Reemplazando $\partial x_i / \partial p_j = \partial h_i / \partial p_j - x_j \partial x_i / \partial I$:

$$\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial p_j} = \underbrace{\frac{\partial h_i}{\partial p_j}}_{ES} - \underbrace{x_j \frac{\partial x_i}{\partial I}}_{EIO} + \underbrace{w_j \frac{\partial x_i}{\partial I}}_{EID} = \boxed{\frac{\partial h_i}{\partial p_j} + (w_j - x_j) \frac{\partial x_i}{\partial I}}.$$

(b) CPO del UMP con $u = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}$: $1/(2\sqrt{y_i}) = \lambda p_i \Rightarrow y_i = 1/(4\lambda^2 p_i^2)$. Reemplazando en la restricción, $1/(4\lambda^2) = Ip_1 p_2 / (p_1 + p_2)$, luego

$$y_1(\mathbf{p}, I) = \frac{Ip_2}{p_1(p_1 + p_2)}, \quad y_2(\mathbf{p}, I) = \frac{Ip_1}{p_2(p_1 + p_2)}, \quad v(\mathbf{p}, I) = \sqrt{I \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right)}.$$

Invirtiendo $v = \bar{u}$: $e(\mathbf{p}, \bar{u}) = \bar{u}^2 p_1 p_2 / (p_1 + p_2)$. Por Shephard, $h_1(\mathbf{p}, \bar{u}) = \bar{u}^2 p_2^2 / (p_1 + p_2)^2$.

(c) Con $\mathbf{w}^E = (4, 1)$, $\mathbf{p}^0 = (1, 1)$, $\mathbf{p}^1 = (4, 1)$:

$$\begin{aligned} I^0 &= 5, & I^1 &= 17, & V^0 &= \sqrt{10}, \\ m' &= 10 \cdot 4 \cdot 1/5 = 8, & y_1^0 &= 2.5, & y_1^1 &= 0.85. \end{aligned}$$

$\Delta y_1 = 0.85 - 2.5 = -1.65$. Los tres efectos:

$$\begin{aligned} h_1(\mathbf{p}^1, V^0) &= 10 \cdot 1/25 = 0.4, & \Delta y_1^{ES} &= 0.4 - 2.5 = -2.10, \\ y_1(\mathbf{p}^1, I^0) &= 5 \cdot 1/20 = 0.25, & \Delta y_1^{EIO} &= 0.25 - 0.4 = -0.15, \\ y_1(\mathbf{p}^1, I^1) &= 0.85, & \Delta y_1^{EID} &= 0.85 - 0.25 = +0.60. \end{aligned}$$

Suma: $-2.10 - 0.15 + 0.60 = -1.65 = \Delta y_1$.

(d) La fórmula marginal $(y_1^E - y_1)\partial y_1/\partial I$: con $y_1^E - y_1 > 0$ (vendedor neto) y $\partial y_1/\partial I > 0$ (bien normal), $EID > 0$, amortiguando el ES negativo. Cuando $|EID| > |ES|$ (dotación concentrada en el bien cuyo precio sube, efecto ingreso fuerte), $\Delta y_1 > 0$: el vendedor neto consume más de su propio producto al subir su precio.

8. Ingreso, ingreso marginal y elasticidad.

(a) $R(p) = pX(p)$:

$$\frac{dR}{dp} = X + p \frac{dX}{dp} = X \left[1 + \frac{p}{X} \frac{dX}{dp} \right] = X(1 - \varepsilon).$$

Por la regla de la cadena, $dR/dX = (dR/dp)/(dX/dp) = p(1 - 1/\varepsilon)$.

(b) Para $X = 150 - 3p$: $\varepsilon(p) = 3p/(150 - 3p) = 1 \Rightarrow p^* = 25$, $X^* = 75$, $R^* = 1875$. Regla clásica $a/(2b) = 150/6 = 25$.

(c) $X = Ap^{-\eta} \Rightarrow \varepsilon \equiv \eta$ y $R = Ap^{1-\eta}$, $dR/dp = A(1 - \eta)p^{-\eta}$:

- $\eta > 1$: $dR/dp < 0$, conviene bajar p (esquina $p \rightarrow 0^+$).
- $\eta < 1$: $dR/dp > 0$, conviene subir p (esquina superior).
- $\eta = 1$: $R \equiv A$ constante.

No hay óptimo interior bajo elasticidad constante.

9. Agregación de demanda, consumidor representativo y conexión con equilibrio general (opcional).

(a) *Identidad de Roy aplicada a Gorman.* La identidad establece que para v diferenciable con $\partial v/\partial w \neq 0$, $x_j(\mathbf{p}, w) = -(\partial v/\partial p_j)/(\partial v/\partial w)$. Aplicada a $v_i = a_i(\mathbf{p}) + b(\mathbf{p})w_i$: $\partial v_i/\partial p_j = \partial_j a_i + \partial_j b \cdot w_i$, $\partial v_i/\partial w_i = b(\mathbf{p})$. Luego

$$x_{ij}(\mathbf{p}, w_i) = -\frac{\partial_j a_i(\mathbf{p}) + \partial_j b(\mathbf{p}) w_i}{b(\mathbf{p})} = \underbrace{-\frac{\partial_j a_i(\mathbf{p})}{b(\mathbf{p})}}_{\alpha_{ij}(\mathbf{p})} + \underbrace{\left(-\frac{\partial_j b(\mathbf{p})}{b(\mathbf{p})}\right)}_{\beta_j(\mathbf{p})} w_i.$$

La demanda es lineal en w_i . El intercepto α_{ij} depende de i (heterogeneidad de gustos); la pendiente β_j es *común* a todos los consumidores: un sol adicional incrementa la demanda del bien j en la misma cantidad para todo agente. Por eso $\beta_j(\mathbf{p})$ se llama *propensión marginal a consumir* el bien j .

(b) *Curvas de Engel paralelas.* A precios fijos, $w_i \mapsto x_{ij}(\mathbf{p}, w_i) = \alpha_{ij}(\mathbf{p}) + \beta_j(\mathbf{p})w_i$: rectas con misma pendiente $\beta_j(\mathbf{p})$ e interceptos $\alpha_{ij}(\mathbf{p})$ distintos. Geométricamente: paralelas. Esta es la caracterización geométrica de Gorman.

(c) *Agregación.* Sumando sobre i :

$$X_j(\mathbf{p}, w_1, \dots, w_M) = \sum_i [\alpha_{ij}(\mathbf{p}) + \beta_j(\mathbf{p})w_i] = A_j(\mathbf{p}) + \beta_j(\mathbf{p})W, \quad A_j = \sum_i \alpha_{ij}, \quad W = \sum_i w_i.$$

La demanda agregada depende del vector (w_1, \dots, w_M) *solo a través* de la suma W . Una transferencia que conserve W deja X_j inalterada: la distribución del ingreso es irrelevante para la demanda agregada (no para el bienestar individual).

(d) *Consumidor representativo.* Defina $V(\mathbf{p}, W) := A(\mathbf{p}) + b(\mathbf{p})W$ con $A(\mathbf{p}) := \sum_i a_i(\mathbf{p})$. Entonces $\partial V/\partial p_j = A'(p_j) + b'(p_j)W$, $\partial V/\partial W = b(\mathbf{p})$. Por Roy:

$$-\frac{A'(p_j) + b'(p_j)W}{b(\mathbf{p})} = \sum_i \alpha_{ij}(\mathbf{p}) + \beta_j(\mathbf{p})W = A_j(\mathbf{p}) + \beta_j(\mathbf{p})W = X_j(\mathbf{p}, W).$$

V tiene la misma estructura $a + bw$ que las v_i , por lo que es utilidad indirecta de un consumidor ficticio con ingreso W .

(e) *Homotéticas idénticas.* Si todos los $u_i \equiv u$ con u homogénea de grado 1, $x(\mathbf{p}, w) = w m(\mathbf{p})$ y $v(\mathbf{p}, w) = u(w m(\mathbf{p})) = w \cdot u(m(\mathbf{p})) \equiv b(\mathbf{p})w$. Es Gorman con $a_i \equiv 0$, b trivialmente común. Las curvas de Engel *coinciden* (no solo paralelas).

(f) *Quasilineales.* CPO de la UMP interior con $u_i = x_0 + \sum_j \varphi_{ij}(x_j)$, $p_0 = 1$: $\varphi'_{ij}(x_j) = p_j \Rightarrow x_{ij}^* = \psi_{ij}(p_j)$ con $\psi_{ij} = (\varphi'_{ij})^{-1}$, *independiente* de w_i . El numérico absorbe la riqueza

residual: $x_{i0}^* = w_i - \sum_{j \geq 1} p_j \psi_{ij}(p_j)$. Sustituyendo:

$$v_i(\mathbf{p}, w_i) = w_i + \underbrace{\sum_{j \geq 1} [\varphi_{ij}(\psi_{ij}(p_j)) - p_j \psi_{ij}(p_j)]}_{\alpha_i(\mathbf{p})}.$$

Es Gorman con $b(\mathbf{p}) \equiv 1$. En quasilineal, todo cambio de ingreso va al numérario; las curvas de Engel para los bienes no-numérario son horizontales (pendiente cero, trivialmente igual entre consumidores).

(g) *Cobb-Douglas heterogénea*. Para $u = x^\alpha y^{1-\alpha}$: $x = \alpha w / p_x$, $y = (1 - \alpha)w / p_y$, $v(\mathbf{p}, w) = w \cdot K_\alpha / [p_x^\alpha p_y^{1-\alpha}]$ con $K_\alpha = \alpha^\alpha (1 - \alpha)^{1-\alpha}$. La pendiente $b_\alpha(\mathbf{p})$ depende de α , luego no es Gorman con b común. Con $\alpha_1 = 1/4$, $\alpha_2 = 3/4$ la demanda agregada de x es

$$X(\mathbf{p}, w_1, w_2) = \frac{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2}{p_x} = \frac{w_1 + 3w_2}{4p_x}.$$

Con $W = w_1 + w_2 = 100$ fijo:

$$(100, 0) \Rightarrow X = 25/p_x; \quad (0, 100) \Rightarrow X = 75/p_x; \quad (50, 50) \Rightarrow X = 50/p_x.$$

Tres demandas distintas para el mismo W : cuando los hogares difieren en gustos (no solo en ingreso), una transferencia entre ellos sí cambia la demanda agregada.

(h) *Teorema de Sonnenschein–Mantel–Debreu*. En una economía de intercambio puro, el exceso de demanda agregado $z : \mathbb{R}_{++}^L \rightarrow \mathbb{R}^L$ es continuo, 0-homogéneo y satisface la ley de Walras $\mathbf{p} \cdot z(\mathbf{p}) = 0$. El teorema SMD muestra el converso en un compacto: *cualquier* función con esas propiedades es exceso de demanda de alguna economía con L consumidores. Consecuencias:

- La racionalidad individual no descarta ningún comportamiento agregado más allá de continuidad, 0-homogeneidad y Walras. Las propiedades de Slutsky y WARP individuales *no* se trasladan al agregado sin Gorman.
- *Unicidad* del equilibrio walrasiano no está garantizada: pueden coexistir múltiples \mathbf{p}^* con $z(\mathbf{p}^*) = 0$. La *estabilidad* del tatonnement tampoco lo está sin condiciones adicionales (sustituibilidad bruta, WARP agregado).
- La macro de agente representativo carece de fundamento sin Gorman. Por eso Gorman es necesario y suficiente para reducir la macro a una optimización individual con buenas propiedades.

(i) *Aumann (1964): economía con un continuo de agentes*. Restringimos la estructura del mercado a competencia perfecta idealizada: un continuo de agentes atómicos en un espacio de medida (T, \mathcal{T}, μ) con μ probabilidad *no atómica* (todo subconjunto de medida positiva se puede subdividir indefinidamente; ningún agente individual tiene peso positivo).

Las dotaciones son una función medible $w : T \rightarrow \mathbb{R}_+^L$ con dotación agregada finita:

$$\int_T \|w(i)\| d\mu(i) < \infty.$$

Una *asignación* es una función $f : T \rightarrow \mathbb{R}_+^L$ μ -integrable, *factible* si

$$\int_T f d\mu \leq \int_T w d\mu.$$

Una *coalición* es $S \in \mathcal{T}$ con $\mu(S) > 0$. La coalición S *bloquea* la asignación f si existe $g : S \rightarrow \mathbb{R}_+^L$ integrable con

$$\int_S g d\mu \leq \int_S w d\mu \quad \text{y} \quad g(i) \succ_i f(i) \quad \text{para } \mu\text{-c.s. } i \in S.$$

El *núcleo* $C(\mathcal{E})$ es el conjunto de asignaciones factibles no bloqueadas por ninguna coalición. La demanda agregada se define por

$$X(\mathbf{p}) = \int_T x(\mathbf{p}, w(i)) d\mu(i),$$

y un *equilibrio walrasiano* es un par (\mathbf{p}, f) con f factible tal que para μ -c.s. i , $f(i)$ maximiza \succeq_i sobre $\{x \in \mathbb{R}_+^L : \mathbf{p} \cdot x \leq \mathbf{p} \cdot w(i)\}$, y

$$\int_T f d\mu = \int_T w d\mu.$$

Sobre esta estructura, dos resultados centrales:

- *Convexificación (Lyapunov, 1940)*. El rango de una medida vectorial no atómica $\nu : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un subconjunto convexo y compacto de \mathbb{R}^n . Implicación económica: aunque las preferencias individuales no sean convexas (bienes indivisibles, retornos crecientes locales), la integración de Lebesgue convexifica automáticamente la demanda agregada, restaurando existencia del equilibrio sin requerir convexidad individual.
- *Equivalencia núcleo–Walras (Aumann, 1964)*. En la economía continua con μ no atómica y preferencias continuas, monótonas y convexas, $C(\mathcal{E})$ coincide con el conjunto de asignaciones de equilibrio walrasiano. La competencia perfecta descentralizada implementa exactamente lo que coaliciones libres lograrían negociando. En economías finitas solo se obtiene $C(\mathcal{E}) \supseteq \text{Walras}$; la igualdad es propiedad estricta del continuo, y se aproxima vía réplicas (Debreu–Scarf 1963).

Síntesis. Gorman restringe preferencias para hacer “limpia” la agregación; SMD muestra que sin Gorman el agregado puede ser arbitrario; Aumann restringe la estructura del mercado (competencia perfecta idealizada) para que la heterogeneidad se “alise” por integración. Tres

vías para conectar la microeconomía individual con el equilibrio general y la macroeconomía agregada.