

Microeconomía 1

Práctica Dirigida 3 — Solucionario

Profesor: José Gallardo Ku (j.gallardo@pucp.edu.pe)

Jefes de práctica: Marcelo Gallardo (marcelo.gallardo@pucp.edu.pe) |
Raúl Amao (raul.amao@pucp.edu.pe)

Los ejercicios marcados con (★) o (★★) presentar una dificultad mayor o mucho mayor a la de los ejercicios clásicos de las dirigidas o calificadas. Están pensados para los alumnos interesados en profundizar en aspectos axiomáticos o matemáticos del curso. No son ejercicios obligatorios o evaluables en calificada.

1 Ejercicios para la sesión de práctica

1.1 Utilidad indirecta e identidad de Roy

1. Cuatro funciones de utilidad.

(a) Cobb-Douglas.

Solución. Lagrangiano: $\mathcal{L} = x_1^\alpha x_2^\beta + \lambda(w - p_1 x_1 - p_2 x_2)$.

CPO interiores: $\lambda p_1 = \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta$ y $\lambda p_2 = \beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1}$. Dividiendo:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha x_2}{\beta x_1} \implies p_1 x_1 = \frac{\alpha}{\beta} p_2 x_2.$$

Sustituyendo en $p_1 x_1 + p_2 x_2 = w$: $p_2 x_2 (\alpha/\beta + 1) = w \implies p_2 x_2 = \beta w / \bar{\alpha}$.

Demandas marshallianas:

$$x_1(p, w) = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \cdot \frac{w}{p_1}, \quad x_2(p, w) = \frac{\beta}{\bar{\alpha}} \cdot \frac{w}{p_2}.$$

Utilidad indirecta:

$$v(p, w) = \left(\frac{\alpha w}{\bar{\alpha} p_1} \right)^\alpha \left(\frac{\beta w}{\bar{\alpha} p_2} \right)^\beta = K \frac{w^{\bar{\alpha}}}{p_1^\alpha p_2^\beta}, \quad K = \left(\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{\bar{\alpha}} \right)^\beta.$$

(b) Lineal.

Solución. Las curvas de indiferencia son rectas con pendiente $-a/b$. La RP tiene pendiente $-p_1/p_2$. El consumidor gasta todo en el bien de mayor “rendimiento por sol gastado”:

- $a/p_1 > b/p_2$: $x_1^* = w/p_1$, $x_2^* = 0$, $v = aw/p_1$.
- $a/p_1 < b/p_2$: $x_1^* = 0$, $x_2^* = w/p_2$, $v = bw/p_2$.
- $a/p_1 = b/p_2$: cualquier punto de la RP es óptimo; $v = aw/p_1 = bw/p_2$.

$$v(p, w) = w \cdot \max\left\{\frac{a}{p_1}, \frac{b}{p_2}\right\}.$$

(c) **Leontief.**

Solución. Argumento geométrico. Las CIs son “eles” con vértice en la recta $ax_1 = bx_2$. Aumentar x_1 con $ax_1 < bx_2$ no aumenta $u = \min\{ax_1, bx_2\} = ax_1$ pero sí consume ingreso. Luego el óptimo está siempre en el vértice: $ax_1^* = bx_2^*$.

De $ax_1 = bx_2$ y $p_1x_1 + p_2x_2 = w$: $x_1(p_1 + ap_2/b) = w$.

$$x_1 = \frac{bw}{bp_1 + ap_2}, \quad x_2 = \frac{aw}{bp_1 + ap_2}, \quad v(p, w) = \frac{abw}{bp_1 + ap_2}.$$

(d) (***) **CES.**

Solución. Lagrangiano: $\mathcal{L} = (\alpha_1x_1^\rho + \alpha_2x_2^\rho)^{1/\rho} + \lambda(w - p_1x_1 - p_2x_2)$. CPO: $\alpha_i x_i^{\rho-1} (\dots)^{1/\rho-1} = \lambda p_i$. Dividiendo la condición de x_1 entre la de x_2 :

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\rho-1} = \frac{p_1}{p_2} \implies \frac{x_1}{x_2} = \left(\frac{\alpha_1 p_2}{\alpha_2 p_1}\right)^\sigma, \quad \sigma = \frac{1}{1-\rho}.$$

Sustituyendo en $p_1x_1 + p_2x_2 = w$, con $S = \alpha_1^\sigma p_1^{1-\sigma} + \alpha_2^\sigma p_2^{1-\sigma}$:

$$x_i(p, w) = \frac{\alpha_i^\sigma p_i^{-\sigma}}{S} w.$$

Partiendo de las demandas marshallianas

$$x_i(p, w) = \frac{\alpha_i^\sigma p_i^{-\sigma}}{S} w, \quad S = \alpha_1^\sigma p_1^{1-\sigma} + \alpha_2^\sigma p_2^{1-\sigma}, \quad \sigma = \frac{1}{1-\rho},$$

la utilidad indirecta se obtiene sustituyendo en u .

Paso 1. Calcular $\alpha_i x_i^\rho$:

$$\alpha_i x_i^\rho = \alpha_i \left(\frac{\alpha_i^\sigma p_i^{-\sigma}}{S} w\right)^\rho = \frac{\alpha_i^{1+\sigma\rho} p_i^{-\sigma\rho}}{S^\rho} w^\rho.$$

Paso 2. Simplificar exponentes usando $\sigma(1-\rho) = 1$, de donde $\sigma\rho = \sigma - 1$:

$$1 + \sigma\rho = \sigma, \quad -\sigma\rho = 1 - \sigma, \quad \implies \alpha_i x_i^\rho = \frac{\alpha_i^\sigma p_i^{1-\sigma}}{S^\rho} w^\rho.$$

Paso 3. Sumar en i :

$$\sum_i \alpha_i x_i^\rho = \frac{\alpha_1^\sigma p_1^{1-\sigma} + \alpha_2^\sigma p_2^{1-\sigma}}{S^\rho} w^\rho = \frac{S}{S^\rho} w^\rho = S^{1-\rho} w^\rho.$$

Paso 4. Elevar a $1/\rho$:

$$v(p, w) = (S^{1-\rho} w^\rho)^{1/\rho} = S^{(1-\rho)/\rho} w.$$

Como $(1 - \rho)/\rho = 1/(\sigma - 1) = -1/(1 - \sigma)$, definiendo el *índice de precios CES*

$$P(p) \equiv S^{1/(1-\sigma)} = (\alpha_1^\sigma p_1^{1-\sigma} + \alpha_2^\sigma p_2^{1-\sigma})^{1/(1-\sigma)},$$

se obtiene la forma compacta

$$v(p, w) = \frac{w}{P(p)}.$$

Casos límite.

(a) $\rho \rightarrow 0$, es decir $\sigma \rightarrow 1$ (Cobb–Douglas). Tomando logaritmos de la utilidad (con $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$),

$$\ln u(x) = \frac{\ln(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)}{\rho}.$$

Cuando $\rho \rightarrow 0$, numerador y denominador tienden a 0: indeterminación 0/0. Aplicando **L'Hôpital** respecto a ρ :

$$\frac{d}{d\rho} \ln(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho) = \frac{\alpha_1 x_1^\rho \ln x_1 + \alpha_2 x_2^\rho \ln x_2}{\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2.$$

Por tanto

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \ln u = \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2 \implies u(x) \rightarrow x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}.$$

El mismo argumento sobre el índice de precios da

$$\ln P = \frac{\ln S(\sigma)}{1 - \sigma} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 1} \alpha_1 \ln(p_1/\alpha_1) + \alpha_2 \ln(p_2/\alpha_2),$$

luego $P \rightarrow (p_1/\alpha_1)^{\alpha_1} (p_2/\alpha_2)^{\alpha_2}$ y

$$v(p, w) \longrightarrow w \left(\frac{\alpha_1}{p_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2}{p_2} \right)^{\alpha_2},$$

la utilidad indirecta Cobb–Douglas clásica.

(b) $\rho \rightarrow -\infty$, es decir $\sigma \rightarrow 0$ (Leontief). Con $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ y, sin pérdida de generalidad, $x_1 \leq x_2$, factorizamos el término dominante (al ser $\rho < 0$, la base menor genera el valor mayor de x_i^ρ):

$$(x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho} = x_1 (1 + (x_2/x_1)^\rho)^{1/\rho}.$$

Sea $r = x_2/x_1 \geq 1$. Entonces $r^\rho \rightarrow 0$ cuando $\rho \rightarrow -\infty$, y

$$\frac{\ln(1 + r^\rho)}{\rho} \sim \frac{r^\rho}{\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow -\infty} 0,$$

de modo que $(1 + r^\rho)^{1/\rho} \rightarrow e^0 = 1$ y

$$\lim_{\rho \rightarrow -\infty} u(x) = x_1 = \min\{x_1, x_2\}.$$

Para la utilidad indirecta, con $\alpha_i = 1$ se tiene $S = p_1^{1-\sigma} + p_2^{1-\sigma}$ y $1/(1-\sigma) \rightarrow 1$, así que

$$P \rightarrow p_1 + p_2, \quad v(p, w) \rightarrow \frac{w}{p_1 + p_2},$$

que coincide con la utilidad indirecta de Leontief, pues en el vértice $x_1 = x_2 = w/(p_1 + p_2)$.

2. Identidad de Roy.

(a) Demostración.

Solución. Con el lagrangiano $\mathcal{L} = u(x) + \lambda(w - p \cdot x)$, el teorema de la envolvente¹ establece que la derivada de la función de valor respecto a un parámetro es igual a la derivada parcial del lagrangiano respecto a ese parámetro, evaluada en el óptimo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial p_i} &= \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} \right|_{x^*, \lambda^*} = -\lambda^* x_i^*(p, w), \\ \frac{\partial v}{\partial w} &= \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} \right|_{x^*, \lambda^*} = \lambda^*. \end{aligned}$$

Dividiendo:

$$\frac{\partial v / \partial p_i}{\partial v / \partial w} = \frac{-\lambda^* x_i^*}{\lambda^*} = -x_i^*(p, w).$$

Despejando se obtiene la **identidad de Roy**:

$$\boxed{x_i(p, w) = -\frac{\partial v / \partial p_i}{\partial v / \partial w}.$$

$\partial v / \partial p_i = -\lambda^* x_i^* < 0$: subir el precio del bien i reduce la utilidad máxima alcanzable (el consumidor “pierde” bienestar en proporción a la cantidad que consume de ese bien). El signo negativo en la fórmula cancela este signo negativo para devolver la cantidad demandada, que es positiva.

(b) Verificación: Cobb-Douglas y Leontief.

Solución. Cobb-Douglas. $v = Kw^{\bar{\alpha}} / (p_1^\alpha p_2^\beta)$. $\partial v / \partial p_1 = -(\alpha/p_1)v$, $\partial v / \partial w = (\bar{\alpha}/w)v$.

$$-\frac{-(\alpha/p_1)v}{(\bar{\alpha}/w)v} = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \cdot \frac{w}{p_1} = x_1(p, w). \checkmark$$

¹**Teorema de la envolvente.** Sea $V(\theta) = \min_x \mathcal{L}(x, \lambda^*; \theta)$ la función de valor de un problema de optimización con parámetro θ y solución diferenciable $(x^*(\theta), \lambda^*(\theta))$. Entonces $\frac{\partial V(\theta)}{\partial \theta} = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \right|_{(x^*(\theta), \lambda^*(\theta))}$, es decir, basta derivar el lagrangiano respecto al parámetro manteniendo las variables de elección y los multiplicadores fijos en su valor óptimo.

Leontief. $v = abw/(bp_1 + ap_2)$. $\partial v/\partial p_1 = -ab^2w/(bp_1 + ap_2)^2$, $\partial v/\partial w = ab/(bp_1 + ap_2)$.

$$-\frac{-ab^2w/(bp_1 + ap_2)^2}{ab/(bp_1 + ap_2)} = \frac{bw}{bp_1 + ap_2} = x_1. \checkmark$$

Nota: $u = \min\{\cdot\}$ no es diferenciable en el óptimo, pero v sí lo es porque el óptimo varía suavemente con (p, w) .

(c) **Caso lineal.**

Solución. Caso $a/p_1 > b/p_2$: $v = aw/p_1$. $\partial v/\partial p_1 = -aw/p_1^2$, $\partial v/\partial p_2 = 0$, $\partial v/\partial w = a/p_1$.

$$x_1 = -\frac{-aw/p_1^2}{a/p_1} = \frac{w}{p_1}. \checkmark \quad x_2 = -\frac{0}{a/p_1} = 0. \checkmark$$

Caso $a/p_1 < b/p_2$: simétricamente $x_1 = 0$, $x_2 = w/p_2$. \checkmark

Cuando $a/p_1 = b/p_2$ la función $v = w \max\{a/p_1, b/p_2\}$ no es diferenciable respecto a precios (tiene un kink) en todo punto del plano $(p_1, p_2, w) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_{++}$. Por ende, la identidad de Roy no se puede usar en esos puntos.²

3. Recuperar la demanda desde v .

(a) $v = w^2/(4p_1p_2)$.

Solución. $\partial v/\partial p_1 = -w^2/(4p_1^2p_2)$, $\partial v/\partial w = w/(2p_1p_2)$.

$$x_1 = \frac{w^2/(4p_1^2p_2)}{w/(2p_1p_2)} = \frac{w}{2p_1}, \quad x_2 = \frac{w}{2p_2}.$$

Walras: $p_1 \cdot w/(2p_1) + p_2 \cdot w/(2p_2) = w$. \checkmark

Corresponde a **Cobb-Douglas** $u = x_1^{1/2}x_2^{1/2}$: con $\alpha = \beta = 1/2$, $K = 1/2$ y $v = (1/2)w/(p_1^{1/2}p_2^{1/2})$; la v dada es una transformación monótona de esa.

(b) $v = w(1/p_1 + 1/p_2)$.

Solución. $\partial v/\partial p_1 = -w/p_1^2$, $\partial v/\partial w = 1/p_1 + 1/p_2$.

$$x_1 = \frac{w/p_1^2}{(1/p_1 + 1/p_2)/(p_1p_2)} = \frac{wp_2}{p_1(p_1 + p_2)}, \quad x_2 = \frac{wp_1}{p_2(p_1 + p_2)}.$$

Walras: $p_1x_1 + p_2x_2 = wp_2/(p_1 + p_2) + wp_1/(p_1 + p_2) = w$. \checkmark

Corresponde a **CES** con $\rho = 1/2$ ($\sigma = 2$) y pesos iguales: $u = (x_1^{1/2} + x_2^{1/2})^2$.

(c) $v = abw/(bp_1 + ap_2)$.

Solución. $\partial v/\partial p_1 = -ab^2w/(bp_1 + ap_2)^2$, $\partial v/\partial w = ab/(bp_1 + ap_2)$.

$$x_1 = \frac{bw}{bp_1 + ap_2}, \quad x_2 = \frac{aw}{bp_1 + ap_2}.$$

Walras: $(bp_1 + ap_2)w/(bp_1 + ap_2) = w$. \checkmark

Corresponde a **Leontief** $u = \min\{ax_1, bx_2\}$.

²Nota técnica: Sin embargo, dicho conjunto tiene medida cero.

1.2 Minimización del gasto y dualidad

1. EMP para cuatro funciones.

(a) Cobb-Douglas.

Solución. Lagrangiano: $\mathcal{L} = p_1x_1 + p_2x_2 - \mu(x_1^\alpha x_2^\beta - \bar{u})$. CPO: $p_i = \mu u_i(x)$. Dividiendo: $p_1/p_2 = \alpha x_2/(\beta x_1) \Rightarrow x_2 = \beta p_1 x_1/(\alpha p_2)$. Sustituyendo en la restricción activa:

$$x_1^{\bar{\alpha}} = \bar{u} \left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1} \right)^\beta.$$

$$h_1 = \bar{u}^{1/\bar{\alpha}} \left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1} \right)^{\beta/\bar{\alpha}}, \quad h_2 = \bar{u}^{1/\bar{\alpha}} \left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2} \right)^{\alpha/\bar{\alpha}}.$$

Con $\bar{\alpha} = 1$: $e(p, \bar{u}) = \bar{u} p_1^\alpha p_2^\beta / K$, $K = (\alpha/\bar{\alpha})^\alpha (\beta/\bar{\alpha})^\beta$.

(b) Lineal.

Solución. El consumidor minimiza el gasto alcanzando \bar{u} comprando sólo el bien más barato por unidad de utilidad:

- $p_1/a < p_2/b$: $h_1 = \bar{u}/a$, $h_2 = 0$, $e = p_1 \bar{u}/a$.
- $p_1/a > p_2/b$: $h_1 = 0$, $h_2 = \bar{u}/b$, $e = p_2 \bar{u}/b$.

$$e(p, \bar{u}) = \bar{u} \cdot \min \left\{ \frac{p_1}{a}, \frac{p_2}{b} \right\}.$$

(c) Leontief.

Solución. Para alcanzar \bar{u} : necesariamente $ax_1 = bx_2 = \bar{u}$, pues la utilidad es $\min\{ax_1, bx_2\}$. Reducir cualquiera de los bienes por debajo de \bar{u}/a o \bar{u}/b viola la restricción.

$$h_1 = \frac{\bar{u}}{a}, \quad h_2 = \frac{\bar{u}}{b}, \quad e(p, \bar{u}) = \bar{u} \left(\frac{p_1}{a} + \frac{p_2}{b} \right).$$

(d) CES.

Solución. Por dualidad: $h_i(p, \bar{u}) = x_i(p, e(p, \bar{u}))$ con $e = \bar{u}P$. Verificación por el lema de Shephard: $\partial e/\partial p_i = \bar{u} \partial P/\partial p_i$. Sea $S = \sum_j \alpha_j^\sigma p_j^{1-\sigma}$, $P = S^{1/(1-\sigma)}$.

$$\frac{\partial P}{\partial p_i} = \frac{1}{1-\sigma} S^{1/(1-\sigma)-1} \cdot \alpha_i^\sigma (1-\sigma) p_i^{-\sigma} = \alpha_i^\sigma p_i^{-\sigma} P^\sigma.$$

$$h_i(p, \bar{u}) = \bar{u} \alpha_i^\sigma p_i^{-\sigma} P^\sigma, \quad e(p, \bar{u}) = \bar{u} P.$$

2. La función de gasto es cóncava en p .

Solución. Sean $p^0, p^1 \gg 0$, $\theta \in (0, 1)$ y $p^\theta = \theta p^0 + (1-\theta)p^1$. Sea $h^\theta = h(p^\theta, \bar{u})$ la demanda hicksiana óptima a los precios p^θ .

Por definición del mínimo del EMP, cualquier otra canasta que satisfaga la restricción $u(x) \geq \bar{u}$ tiene un gasto mayor o igual al mínimo. En particular, h^θ satisface $u(h^\theta) \geq$

\bar{u} , de modo que a los precios p^0 o p^1 tampoco puede costar menos que el mínimo correspondiente:

$$e(p^0, \bar{u}) \leq p^0 \cdot h^\theta, \quad e(p^1, \bar{u}) \leq p^1 \cdot h^\theta.$$

Multiplique la primera desigualdad por $\theta > 0$, la segunda por $(1 - \theta) > 0$ y súme:

$$\theta e(p^0, \bar{u}) + (1 - \theta) e(p^1, \bar{u}) \leq (\theta p^0 + (1 - \theta)p^1) \cdot h^\theta = p^\theta \cdot h^\theta = e(p^\theta, \bar{u}).$$

Luego $e(\theta p^0 + (1 - \theta)p^1, \bar{u}) \geq \theta e(p^0, \bar{u}) + (1 - \theta)e(p^1, \bar{u})$. ■

Interpretación económica. Si los precios varían, el consumidor puede *reoptimizar* su canasta. A precios promedio el consumidor tiene más flexibilidad que “congelar” el comportamiento de p^0 o p^1 : la posibilidad de ajustar la canasta hace que el costo real de alcanzar \bar{u} nunca sea mayor que el promedio ponderado de los costos a los precios extremos. Equivalentemente, la concavidad refleja que las demandas hicksianas *disminuyen* cuando su propio precio sube (efecto sustitución siempre negativo).

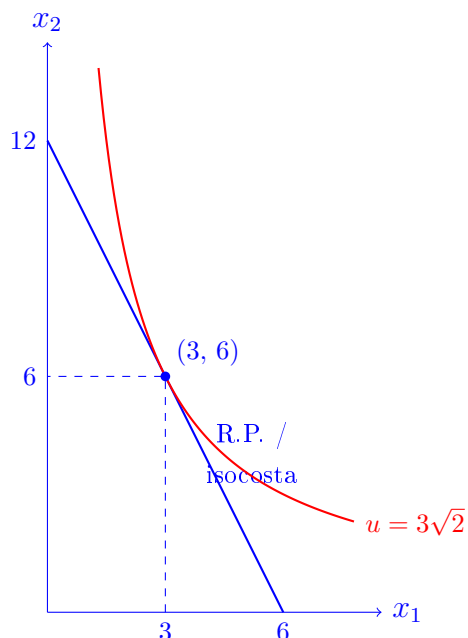
3. Dualidad UMP–EMP y gráfica. Cobb-Douglas, $\bar{\alpha} = 1$: $v = Kw/(p_1^\alpha p_2^\beta)$, $e = \bar{u} p_1^\alpha p_2^\beta / K$.

(a) **Solución.** $e(p, v(p, w)) = v(p, w) \cdot p_1^\alpha p_2^\beta / K = (Kw/(p_1^\alpha p_2^\beta)) \cdot p_1^\alpha p_2^\beta / K = w$. ✓
 $v(p, e(p, \bar{u})) = K e(p, \bar{u}) / (p_1^\alpha p_2^\beta) = K \cdot \bar{u} p_1^\alpha p_2^\beta / (K p_1^\alpha p_2^\beta) = \bar{u}$. ✓

(b) **Solución.** Con $\alpha = \beta = 1/2$, $K = 1/2$, $v = \frac{w}{2\sqrt{p_1 p_2}}$, $e = 2\bar{u}\sqrt{p_1 p_2}$:

$$x_1^* = \frac{w}{2p_1} = \frac{12}{4} = 3, \quad x_2^* = \frac{w}{2p_2} = \frac{12}{2} = 6, \quad \bar{u} = \sqrt{x_1^* x_2^*} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Verificación: $e(p, \bar{u}) = 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 12 = w$. ✓



(c) **Solución.** En el punto (3, 6) la curva de indiferencia $u = 3\sqrt{2}$ es tangente a la recta $2x_1 + x_2 = 12$. Esto significa simultáneamente:

- (UMP) es la curva de indiferencia más alta que toca la restricción presupuestaria.
- (EMP) es la isocosta más baja que toca la curva de indiferencia $u = 3\sqrt{2}$.

La tangencia común certifica que ambas condiciones de optimalidad son idénticas: la razón de precios iguala la TMS.

2 Ejercicios para la casa

2.1 Identidad de Roy y utilidad indirecta

1. **Propiedades de la utilidad indirecta.** $v = Kw/(p_1^\alpha p_2^\beta)$, $\bar{\alpha} = 1$.

Solución. (a) $v(\lambda p, \lambda w) = K(\lambda w)/((\lambda p_1)^\alpha (\lambda p_2)^\beta) = \lambda^{1-1} Kw/(p_1^\alpha p_2^\beta) = v(p, w)$. ✓

(b) $\partial v/\partial p_1 = -\alpha v/p_1 < 0$; $\partial v/\partial w = v/w > 0$. ✓

(c) $s_i = p_i x_i/w$. Para $i = 1$: $s_1 = p_1 \cdot (\alpha w/p_1)/w = \alpha$. Además $\partial \ln v/\partial \ln p_1 = p_1(\partial v/\partial p_1)/v = -\alpha = -s_1$. ✓

(d) **Cuasiconvexidad.** Sea $p^\theta = \theta p^0 + (1 - \theta)p^1$. El conjunto $\{p : v(p, w) \geq c\}$ es convexo. Para verlo: si $v(p^0, w) \geq c$ y $v(p^1, w) \geq c$, entonces a los precios p^θ el consumidor puede *seguir eligiendo la misma canasta* que era factible con p^0 o p^1 (aquella con menor gasto), y por la definición del máximo, $v(p^\theta, w) \geq c$.

Alternativamente: $v \propto w p_1^{-\alpha} p_2^{-\beta}$ es el producto de potencias de funciones convexas, que es cuasiconvexo en p (desigualdad de medias o convexidad de la norma de gasto).

2. Stone-Geary.

Solución. (a) Cambiando variables $\hat{x}_k = x_k - a_k$, el problema equivale a maximizar $(x_1 - a_1)^{b_1} (x_2 - a_2)^{b_2}$ s.a. $p_1 \hat{x}_1 + p_2 \hat{x}_2 \leq \hat{w}$, que es Cobb-Douglas con exponentes que suman 1. Las demandas desplazadas son $\hat{x}_k = b_k \hat{w}/p_k$, luego:

$$v(p, w) = \hat{x}_1^{b_1} \hat{x}_2^{b_2} = \left(\frac{b_1}{p_1}\right)^{b_1} \left(\frac{b_2}{p_2}\right)^{b_2} \hat{w} \equiv C(p) \hat{w}.$$

(b) Roy para $i = 1$: $\partial v/\partial p_1 = (\partial C/\partial p_1) \hat{w} + C(-a_1) = -\frac{b_1}{p_1} C \hat{w} - a_1 C$. $\partial v/\partial w = C$.

$$x_1 = -\frac{-C(b_1 \hat{w}/p_1 + a_1)}{C} = a_1 + \frac{b_1 \hat{w}}{p_1}. \quad \checkmark$$

(c) $\lambda^* = C(p) = (b_1/p_1)^{b_1} (b_2/p_2)^{b_2}$. Depende sólo de precios: la utilidad marginal del ingreso es *constante* en w , reflejando que Stone-Geary tiene propensiones marginales al gasto fijas b_k sobre el ingreso discrecional.

3. **Bienestar y elasticidades vía Roy.** $v = wp_1^{-1/2}p_2^{-1/2}$.

Solución. (a) $\partial v/\partial p_1 = -\frac{w}{2}p_1^{-3/2}p_2^{-1/2}$; $\partial v/\partial w = p_1^{-1/2}p_2^{-1/2}$. $x_1 = w/(2p_1)$, $x_2 = w/(2p_2)$.

(b) $\partial x_1/\partial p_1 = -w/(2p_1^2)$; $\varepsilon_{11} = (-w/(2p_1^2)) \cdot p_1/(w/(2p_1)) = -1$. $\partial x_1/\partial w = 1/(2p_1)$; $\varepsilon_{1w} = (1/(2p_1)) \cdot w/(w/(2p_1)) = 1$. Demanda unitariamente elástica en precio e ingreso.

(c) $v(\lambda p, \lambda w) = \lambda w(\lambda p_1)^{-1/2}(\lambda p_2)^{-1/2} = \lambda^{1-1}v(p, w) = v(p, w)$. El bienestar **no cambia**: inflación proporcional en precios e ingreso no altera el poder adquisitivo real.

(**) **Recuperar la utilidad directa.** $v = w^2/(p_1p_2)$.

Solución. (a) $x_1 = w/(2p_1)$, $x_2 = w/(2p_2)$. (Cálculo idéntico al ejercicio 3(a) de la sesión.)

(b) $v = \bar{u} \Leftrightarrow w = \sqrt{\bar{u}p_1p_2}$.

$$e(p, \bar{u}) = \sqrt{\bar{u}p_1p_2}.$$

(c) $h_1 = \partial e/\partial p_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\bar{u}p_2/p_1}$. En el óptimo $x_1 = h_1$: $w/(2p_1) = \frac{1}{2}\sqrt{\bar{u}p_2/p_1} \Rightarrow \bar{u} = w^2/(p_1p_2)$, consistente.

Para hallar u : del sistema de demandas $x_1 = w/(2p_1)$ y $x_2 = w/(2p_2)$, se tiene $x_1x_2 = w^2/(4p_1p_2) = \bar{u}/4$. Luego:

$$u(x_1, x_2) = 4x_1x_2 \sim x_1x_2.$$

Corresponde a **Cobb-Douglas** $u = x_1x_2$ ($\alpha = \beta = 1$), o equivalentemente $u = x_1^{1/2}x_2^{1/2}$ bajo transformación monótona.

2.2 Minimización del gasto: propiedades

1. **Propiedades de e para la CES.** $e = \bar{u}P$, $P = (\alpha_1^\sigma p_1^{1-\sigma} + \alpha_2^\sigma p_2^{1-\sigma})^{1/(1-\sigma)}$.

Solución. (a) $P(\lambda p) = (\sum_j \alpha_j^\sigma (\lambda p_j)^{1-\sigma})^{1/(1-\sigma)} = \lambda (\sum_j \alpha_j^\sigma p_j^{1-\sigma})^{1/(1-\sigma)} = \lambda P(p)$. Luego $e(\lambda p, \bar{u}) = \bar{u}\lambda P = \lambda e(p, \bar{u})$. ✓

(b) $\partial e/\partial \bar{u} = P > 0$ (pues $P > 0$). ✓

(c) Lema de Shephard. Sea $S = \sum_j \alpha_j^\sigma p_j^{1-\sigma}$, $P = S^{1/(1-\sigma)}$.

$$\frac{\partial e}{\partial p_i} = \bar{u} \frac{\partial P}{\partial p_i} = \bar{u} \cdot \frac{\alpha_i^\sigma (1-\sigma)p_i^{-\sigma}}{(1-\sigma)S} \cdot S^{1/(1-\sigma)} = \bar{u} \alpha_i^\sigma p_i^{-\sigma} P^\sigma = h_i. \checkmark$$

2. (**) Sea $u : \mathbb{R}_{++}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de utilidad *continua, estrictamente cuasicóncava, estrictamente creciente y diferenciable*. Para $p \gg 0$ y \bar{u} en el rango de u , defina la *función de gasto*

$$e(p, \bar{u}) = \min_{x \geq 0} p \cdot x \quad \text{s.a.} \quad u(x) \geq \bar{u},$$

y denote por $h(p, \bar{u}) = (h_1, \dots, h_n)$ a su solución, la *demanda hicksiana*. Supóngase además que el óptimo es interior.

Justifique brevemente por qué cada uno de los supuestos anteriores es necesario para que el problema esté bien planteado y la demanda hicksiana sea una función diferenciable de (p, \bar{u}) . En particular, explícite el rol de:

- (i) la continuidad de u y $p \gg 0$ (existencia del mínimo);
- (ii) la monotonía estricta de u (la restricción se activa con igualdad);
- (iii) la cuasiconcavidad estricta (unicidad de h);
- (iv) la diferenciabilidad de u y el carácter interior de la solución (uso de condiciones de primer orden con igualdad).

Demuestre el Lema de Shephard: para cada $i = 1, \dots, n$,

$$\frac{\partial e(p, \bar{u})}{\partial p_i} = h_i(p, \bar{u}).$$

Puede apoyarse en el teorema de la envolvente³.

Solución.

Parte 1. Justificación de los supuestos.

(i) Continuidad de u y $p \gg 0$ (existencia del mínimo). El conjunto factible $A(\bar{u}) = \{x \geq 0 : u(x) \geq \bar{u}\}$ es cerrado porque u es continua (imagen inversa del cerrado $[\bar{u}, \infty)$). Con $p \gg 0$, la función objetivo $x \mapsto p \cdot x$ es continua y *coerciva* sobre \mathbb{R}_+^n : sus conjuntos de subnivel $\{x \geq 0 : p \cdot x \leq c\}$ son compactos. Intersecando con $A(\bar{u})$ se obtiene un compacto no vacío (tomando cualquier x^0 con $u(x^0) \geq \bar{u}$, basta restringir la búsqueda a $p \cdot x \leq p \cdot x^0$). Por Weierstrass, el mínimo existe. Si algún $p_i = 0$, el objetivo dejaría de ser coercivo en la dirección e_i y el problema podría no tener mínimo.

(ii) Monotonía estricta de u (restricción activa). Supongamos, por contradicción, que en el óptimo $u(h) > \bar{u}$. Por continuidad existe $\varepsilon > 0$ tal que $u(h - \varepsilon e_i) > \bar{u}$ para algún i con $h_i > 0$ (aquí se usa la monotonía estricta: reducir una coordenada reduce estrictamente u , pero por continuidad uno puede reducirla sin salirse de $A(\bar{u})$). Entonces $h - \varepsilon e_i$ es factible y tiene gasto $p \cdot h - \varepsilon p_i < p \cdot h$, contradiciendo la optimalidad. Luego en el óptimo $u(h) = \bar{u}$ y la restricción se activa con igualdad.

(iii) Cuasiconcavidad estricta (unicidad). Sean h, h' dos soluciones con $p \cdot h = p \cdot h' = e(p, \bar{u})$ y $h \neq h'$. Entonces $h_t = th + (1-t)h'$ satisface $p \cdot h_t = e(p, \bar{u})$ para todo $t \in (0, 1)$. Por cuasiconcavidad *estricta*,

$$u(h_t) > \min\{u(h), u(h')\} = \bar{u},$$

de modo que la restricción no se activa en h_t ; por la parte (ii) esto contradice la optimalidad de h_t . Luego la solución es única y $h(p, \bar{u})$ está bien definida como función.

(iv) Diferenciabilidad de u e interioridad (CPO con igualdad). Que u sea diferenciable permite escribir las condiciones de Kuhn–Tucker en el óptimo:

$$p_i = \lambda \frac{\partial u(h)}{\partial x_i} - \mu_i, \quad \mu_i h_i = 0, \quad \mu_i \geq 0, \quad u(h) = \bar{u}.$$

³**Teorema de la envolvente.** Sea $V(\theta) = \min_x \mathcal{L}(x, \lambda^*; \theta)$ la función de valor de un problema de optimización con parámetro θ y solución diferenciable $(x^*(\theta), \lambda^*(\theta))$. Entonces $\frac{\partial V(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \Big|_{(x^*(\theta), \lambda^*(\theta))}$, es decir, basta derivar el lagrangiano respecto al parámetro manteniendo las variables de elección y los multiplicadores fijos en su valor óptimo.

Si el óptimo es *interior* ($h \gg 0$), entonces $\mu_i = 0$ para todo i y las CPO se reducen a la igualdad $p_i = \lambda \partial_{x_i} u(h)$, junto con $u(h) = \bar{u}$. Este sistema, combinado con la monotonía estricta (que asegura $\nabla u \neq 0$, y por tanto $\lambda > 0$ y la calificación de restricciones) y la cuasiconcavidad estricta (que hace del sistema una biyección local), permite aplicar el teorema de la función implícita y concluir que $h(p, \bar{u})$ y $\lambda^*(p, \bar{u})$ son diferenciables.

Parte 2. Demostración del Lema de Shephard.

El lagrangiano del problema, tratando p como parámetro, es

$$\mathcal{L}(x, \lambda; p) = \sum_{k=1}^n p_k x_k - \lambda(u(x) - \bar{u}).$$

Sea $(h(p, \bar{u}), \lambda^*(p, \bar{u}))$ la solución. Por la parte (ii) la restricción se activa, de modo que en el óptimo

$$e(p, \bar{u}) = p \cdot h(p, \bar{u}) = \mathcal{L}(h(p, \bar{u}), \lambda^*(p, \bar{u}); p).$$

Vía teorema de la envolvente. Por el teorema de la envolvente, para derivar la función de valor $e(p, \bar{u})$ respecto al parámetro p_i basta derivar el lagrangiano respecto a p_i manteniendo (x, λ) fijos en su valor óptimo:

$$\frac{\partial e(p, \bar{u})}{\partial p_i} = \left. \frac{\partial \mathcal{L}(x, \lambda; p)}{\partial p_i} \right|_{x=h(p, \bar{u}), \lambda=\lambda^*(p, \bar{u})}.$$

Como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\sum_{k=1}^n p_k x_k - \lambda(u(x) - \bar{u}) \right) = x_i,$$

evaluando en el óptimo se obtiene

$$\boxed{\frac{\partial e(p, \bar{u})}{\partial p_i} = h_i(p, \bar{u}).}$$

Verificación directa. Como $e(p, \bar{u}) = \sum_k p_k h_k(p, \bar{u})$, por la regla del producto

$$\frac{\partial e}{\partial p_i} = h_i(p, \bar{u}) + \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial h_k(p, \bar{u})}{\partial p_i}.$$

Por la parte (iv), en el óptimo interior $p_k = \lambda^* \partial_{x_k} u(h)$, luego

$$\sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial h_k}{\partial p_i} = \lambda^* \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial h_k}{\partial p_i} = \lambda^* \frac{\partial}{\partial p_i} u(h(p, \bar{u})) = \lambda^* \cdot 0 = 0,$$

pues por la parte (ii) $u(h(p, \bar{u})) = \bar{u}$ es constante en p . Se concluye

$$\frac{\partial e(p, \bar{u})}{\partial p_i} = h_i(p, \bar{u}). \quad \blacksquare$$

Intuición. Ante un pequeño aumento dp_i , el consumidor reajusta sus cantidades h_k para seguir alcanzando \bar{u} . El efecto de primer orden de ese reajuste sobre el gasto se cancela (estábamos en un óptimo), y sólo sobrevive el efecto directo: se pagan h_i unidades adicionales por cada unidad de precio.