Facultad de Ciencias Sociales
Especialidad de Economía
Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) Ciclo 2026-1

Microeconomía 1
Práctica Dirigida 2 — Solucionario

Profesor: José Gallardo Ku (j.gallardo@pucp.edu.pe)
Jefes de práctica: Marcelo Gallardo (marcelo.gallardo@pucp.edu.pe) |
Raúl Amao (raul.amao@pucp.edu.pe)

En todos los ejercicios el problema del consumidor es $\max_{x\geq 0} u(x)$ s.a. $p \cdot x \leq w$. Salvo indicación contraria: solución interior, $p \gg 0$, $w > 0$.

1 Ejercicios para la sesión de práctica

1.1 Restricción presupuestaria

1. **Trabajador (ocio-consumo).**

   (a) **Solución.** El ingreso total del trabajador es $\mu + w(T - \ell)$. La restricción presupuestaria es

   $$pq \;\leq\; \mu + w(T-\ell),$$

   o equivalentemente

   $$pq + w\ell \;\leq\; wT + \mu.$$

   Despejando q:

   $$q \;\leq\; \frac{wT+\mu}{p} - \frac{w}{p}\,\ell.$$

   Verificación de la figura.

   - Intercepto en eje q ($\ell = 0$): $q = (wT + \mu)/p$. ✓
   - Intercepto en eje ℓ ($q = 0$): $\ell = T + \mu/w$. Como $\mu \geq 0$, este punto está a la derecha de T, fuera del dominio admisible $\ell \leq T$.
   - Punto extremo $\ell = T$ (ocio máximo, cero horas trabajadas): $q = \mu/p$. ✓
   - Pendiente: $-w/p$. ✓

   (b) **Solución.** El ingreso laboral es $w(T - \ell)$. El umbral de horas corresponde al ingreso $\bar{y}$, es decir $T - \ell = \bar{y}/w$, o $\ell = T - \bar{y}/w \equiv \ell^*$.

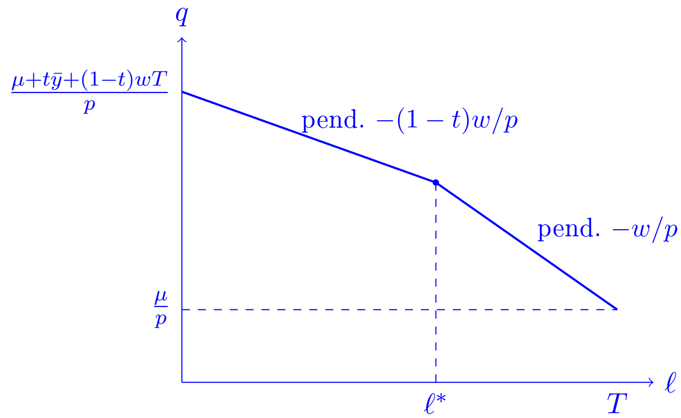
   Para $\ell \geq \ell^*$ (pocas horas trabajadas, ingreso laboral $\leq \bar{y}$): sin impuesto,

   $$q \leq \frac{wT+\mu}{p} - \frac{w}{p}\,\ell. \quad \text{(pendiente } -w/p)$$

Para $\ell < \ell^*$ (muchas horas trabajadas, ingreso laboral $> \bar{y}$): el ingreso neto es $\mu + \bar{y} + (1-t)[w(T-\ell) - \bar{y}]$, de modo que

$$q \leq \frac{\mu + t\bar{y} + (1-t)wT}{p} - \frac{(1-t)w}{p}\,\ell. \quad \text{(pendiente } -(1-t)w/p)$$

El codo (kink) se encuentra en $\ell^* = T - \bar{y}/w$, $q^* = (\mu + \bar{y})/p$.



¿Es convexo el conjunto presupuestario? Sí. La pendiente cambia de $-(1-t)w/p$ (tramo izquierdo, más plana) a $-w/p$ (tramo derecho, más pronunciada) conforme ℓ aumenta. La frontera es cóncava hacia el origen en el kink, por lo que el área debajo de ella es convexo.

(c) **Solución.** Para las primeras H horas de trabajo ($T - \ell \leq H$, equivalentemente $\ell \geq T - H$) el salario es w. Para las horas adicionales ($T - \ell > H$, equivalentemente $\ell < T - H$) el salario es $w' > w$.

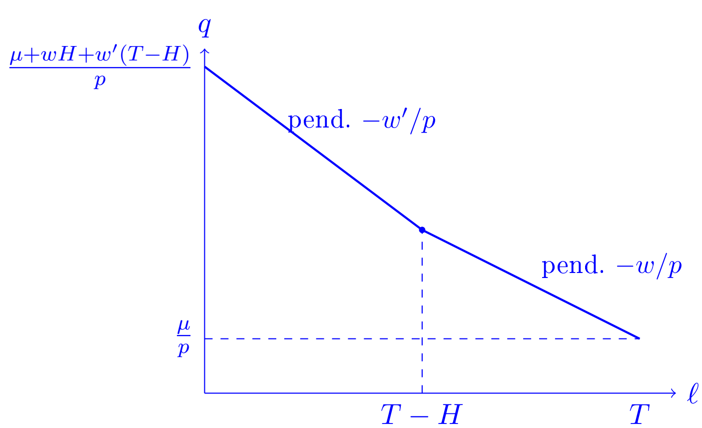
Para $\ell \geq T - H$:

$$q \leq \frac{\mu + wT}{p} - \frac{w}{p}\,\ell. \quad \text{(pendiente } -w/p)$$

Para $\ell < T - H$: el ingreso es $\mu + wH + w'(T - \ell - H)$, de modo que

$$q \leq \frac{\mu + wH + w'(T-H)}{p} - \frac{w'}{p}\,\ell. \quad \text{(pendiente } -w'/p)$$

El codo está en $\ell = T - H$, $q^* = (\mu + wH)/p$.



¿Es convexo? No. La pendiente pasa de $-w/p$ (tramo derecho, más plana) a $-w'/p$ (tramo izquierdo, más pronunciada, pues $w' > w$) conforme ℓ disminuye. En valor algebraico, la pendiente *disminuye* al moverse hacia la derecha: la frontera es convexa hacia el origen en el kink, de modo que el conjunto presupuestario *no* es convexo.

2. **Tarifa en bloques.**

   (a) **Solución.** *Para* $q_1 \leq \bar{q}_1$*:*

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 \leq m \iff q_2 \leq \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} q_1.$$

Para $q_1 > \bar{q}_1$*:* el gasto en combustible es $p_1\bar{q}_1 + p_1'(q_1 - \bar{q}_1)$, así que

$$p_1\bar{q}_1 + p_1'(q_1 - \bar{q}_1) + p_2 q_2 \leq m,$$

$$q_2 \leq \frac{m - (p_1 - p_1')\bar{q}_1}{p_2} - \frac{p_1'}{p_2} q_1.$$

La pendiente pasa de $-p_1/p_2$ a $-p_1'/p_2$, menos pronunciada en valor absoluto pues $p_1' < p_1$.

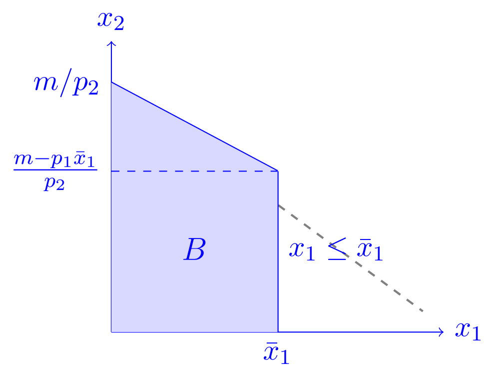
   (b) **Solución. No, el conjunto presupuestario no es convexo.**
La pendiente de la frontera pasa de $-p_1/p_2$ (tramo izquierdo, más pronunciada) a $-p_1'/p_2$ (tramo derecho, más plana), es decir, *aumenta en valor algebraico* al crecer q_1. Esto implica que la frontera superior $q_2 = f(q_1)$ es una función *convexa* con un kink que se abre hacia arriba, de modo que el área por debajo de ella no es convexo.

1.2 Problema del consumidor

1. **Racionamiento (combustible en Lima).**

   (a) **Solución.** El conjunto presupuestario es la intersección de la restricción estándar con la cota vertical $x_1 \leq \bar{x}_1$:

$$B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m,\ x_1 \leq \bar{x}_1\}.$$



(b) **Solución.** Cada consumidor maximiza su utilidad sobre B:

$$\max_{x_1,x_2\geq 0} u_i(x_1,x_2) \quad \text{s.a.} \quad p_1x_1+p_2x_2\leq m, \quad x_1\leq \bar{x}_1.$$

Para el taxista: $u_T = x_1^{3/4}x_2^{1/4}$. Para el trabajador remoto: $u_R = x_1^{1/4}x_2^{3/4}$.

(c) **Solución.** Sin la cota $x_1 \leq \bar{x}_1$, ambas funciones son Cobb-Douglas con $u = x_1^a x_2^{1-a}$, cuyas demandas son $x_1^* = am/p_1$, $x_2^* = (1-a)m/p_2$.

Taxista ($a = 3/4$):

$$x_{1,T}^* = \frac{3m}{4p_1}, \qquad x_{2,T}^* = \frac{m}{4p_2}.$$

Trabajador remoto ($a = 1/4$):

$$x_{1,R}^* = \frac{m}{4p_1}, \qquad x_{2,R}^* = \frac{3m}{4p_2}.$$

(d) **Solución.** Se compara la demanda no restringida de x_1 con $\bar{x}_1$.

Taxista.

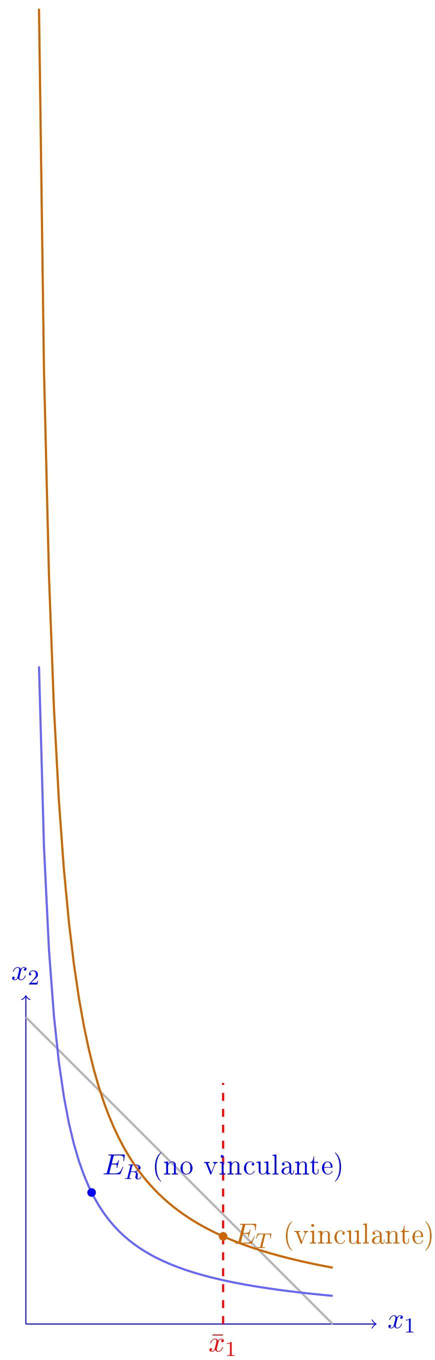
- Si $3m/(4p_1) \leq \bar{x}_1$: la cota no es vinculante; óptimo $\big(3m/(4p_1),\ m/(4p_2)\big)$.
- Si $3m/(4p_1) > \bar{x}_1$: la cota es vinculante; $x_1^* = \bar{x}_1$, $x_2^* = (m - p_1\bar{x}_1)/p_2$.

Trabajador remoto.

- Si $m/(4p_1) \leq \bar{x}_1$: la cota no es vinculante; óptimo $\big(m/(4p_1),\ 3m/(4p_2)\big)$.
- Si $m/(4p_1) > \bar{x}_1$: la cota es vinculante; $x_1^* = \bar{x}_1$, $x_2^* = (m - p_1\bar{x}_1)/p_2$.

(e) **Solución.** El racionamiento afecta más al taxista porque en ausencia de restricciones él destina $3/4$ de su ingreso al combustible (frente a $1/4$ del trabajador remoto). Por tanto, para un mismo $\bar{x}_1$ es más probable que se cumpla $3m/(4p_1) > \bar{x}_1$, haciendo la cota vinculante para el taxista pero no para el trabajador remoto. El taxista sufre una pérdida de utilidad mayor y ve reducida su capacidad de trabajo, mientras que el trabajador remoto, menos dependiente del combustible, puede mantenerse en su óptimo original.

(f) **Solución.** Eligiendo $\bar{x}_1$ tal que $m/(4p_1) < \bar{x}_1 < 3m/(4p_1)$: la demanda no restringida del trabajador remoto cae a la izquierda de $\bar{x}_1$ (cota no vinculante), mientras que la del taxista cae a la derecha (cota vinculante).



El taxista termina en la restricción vertical $x_1 = \bar{x}_1$, mientras que el trabajador remoto alcanza su tangencia habitual.

2. Cobb-Douglas ($n = 2$). $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$, $\alpha, \beta > 0$.

Solución. El lagrangiano es $\mathcal{L} = x_1^\alpha x_2^\beta - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - w)$. Por condiciones de Inada la solución es interior. Las CPO son:

$$\alpha \frac{u}{x_1} = \lambda p_1, \qquad \beta \frac{u}{x_2} = \lambda p_2, \qquad p_1 x_1 + p_2 x_2 = w.$$

Dividiendo la primera entre la segunda: $\dfrac{\alpha x_2}{\beta x_1} = \dfrac{p_1}{p_2}$, es decir $p_2 x_2 = \frac{\beta}{\alpha} p_1 x_1$. Sustituyendo en la restricción:

$$p_1 x_1\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)=w.$$

$$\boxed{x_1(p,w)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{w}{p_1},\qquad x_2(p,w)=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot\frac{w}{p_2}.}$$

Sea $K=\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{\beta}$. La **función indirecta de utilidad** es:

$$\boxed{v(p,w)=K\cdot\frac{w^{\alpha+\beta}}{p_1^{\alpha}\,p_2^{\beta}}.}$$

3. CES ($n=2$). $u(x_1,x_2)=(\alpha_1 x_1^{\rho}+\alpha_2 x_2^{\rho})^{1/\rho}$, $\alpha_i>0$, $\rho<1$, $\rho\neq 0$.

Solución. Es equivalente maximizar $U^{\rho}=\alpha_1 x_1^{\rho}+\alpha_2 x_2^{\rho}$. Las CPO dan:

$$\frac{\alpha_1 x_1^{\rho-1}}{\alpha_2 x_2^{\rho-1}}=\frac{p_1}{p_2}\implies\frac{x_1}{x_2}=\left(\frac{\alpha_1 p_2}{\alpha_2 p_1}\right)^{\sigma},\qquad\sigma=\frac{1}{1-\rho}.$$

Sustituyendo en $p_1x_1+p_2x_2=w$:

$$\boxed{x_i(p,w)=\frac{\alpha_i^{\sigma}\,p_i^{-\sigma}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{2}\alpha_j^{\sigma}\,p_j^{1-\sigma}}\,w,\quad i=1,2.}$$

Definiendo el índice de precios $P=\left(\sum_j\alpha_j^{\sigma}p_j^{1-\sigma}\right)^{1/(1-\sigma)}$:

$$\boxed{v(p,w)=\frac{w}{P}.}$$

4. Stone-Geary ($n=2$). $u=(x_1-a_1)^{b_1}(x_2-a_2)^{b_2}$, $b_1+b_2=1$, $x_i>a_i$.

Solución. *Cambio de variables.* Sea $\hat{x}_i=x_i-a_i>0$ y $\hat{w}=w-p_1a_1-p_2a_2>0$. El problema se convierte en:

$$\max\ \hat{x}_1^{b_1}\hat{x}_2^{b_2}\quad\text{s.a.}\quad p_1\hat{x}_1+p_2\hat{x}_2\le\hat{w},$$

que es Cobb-Douglas con exponentes que suman 1. Sus demandas son $\hat{x}_i=b_i\hat{w}/p_i$, de modo que:

$$\boxed{x_i(p,w)=a_i+\frac{b_i}{p_i}(w-p_1a_1-p_2a_2)\,.}$$

El gasto $p_ix_i=p_ia_i+b_i\hat{w}$ es lineal en w (*Linear Expenditure System*). La función indirecta de utilidad es:

$$\boxed{v(p,w)=\left(\frac{b_1}{p_1}\right)^{b_1}\left(\frac{b_2}{p_2}\right)^{b_2}\cdot(w-p_1a_1-p_2a_2)\,.}$$

5. Cobb-Douglas (n bienes). $u(x) = A\prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k}$, $A > 0$, $\alpha_k > 0$, $\bar{\alpha} = \sum_k \alpha_k$.

Solución. Las CPO para solución interior son $\alpha_k u/x_k = \lambda p_k$ para todo k. Sumando $p_k x_k = \alpha_k u/\lambda$ sobre k: $\lambda = \bar{\alpha}\, u/w$. Sustituyendo:

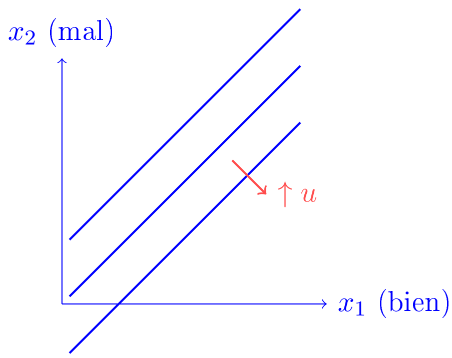
$$\boxed{x_k(p, w) = \frac{\alpha_k}{\bar{\alpha}} \cdot \frac{w}{p_k}, \quad k = 1, \ldots, n.}$$

La participación del gasto $p_k x_k/w = \alpha_k/\bar{\alpha}$ es constante (inelasticidad-precio y curvas de Engel lineales por el origen).

$$\boxed{v(p, w) = A\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\alpha_k}{\bar{\alpha}}\right)^{\alpha_k} \cdot \frac{w^{\bar{\alpha}}}{\prod_k p_k^{\alpha_k}}.}$$

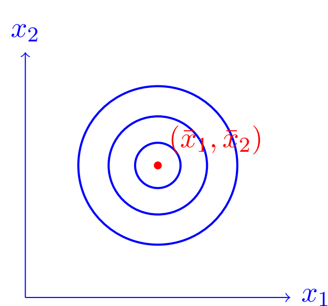
6. Curvas de indiferencia atípicas.

(a) **Solución. Un mal.** $u(x_1, x_2) = x_1 - x_2$. Las curvas de indiferencia tienen pendiente $+1$ (positiva). La dirección de preferencia apunta a la derecha y hacia abajo. Axioma violado: monotonicidad respecto a x_2. Ejemplo: ingreso (x_1) vs. horas de trabajo pesado (x_2).



(b) **Solución. Saciedad en un bien.** $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, \bar{x}_1\} + x_2$. Para $x_1 > \bar{x}_1$ la utilidad marginal de x_1 es cero: las curvas de indiferencia son horizontales en esa región. Axioma violado: monotonicidad estricta en x_1. Ejemplo: sal en una receta.

(c) **Solución. Punto de felicidad.** $u(x_1, x_2) = -(x_1 - \bar{x}_1)^2 - (x_2 - \bar{x}_2)^2$. Las curvas de indiferencia son círculos concéntricos en $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Para $x_i > \bar{x}_i$ la utilidad marginal es negativa. Axioma violado: no saciedad global. Ejemplo: cantidad óptima de azúcar y sal en una receta.



(d) **Solución.** **Bien que se convierte en mal.** $u(x_1, x_2) = x_1 - x_1^2/2 + x_2$. Ejemplo: consumo excesivo de alcohol.

7. Bien, mal e interior. $u(x, y) = \sqrt{x}/(y + 1)$, $p_x = p_y = 1$, $w > 0$.

(a) **Solución.**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}\,(y+1)} > 0 \implies x \textbf{ es un bien.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\sqrt{x}}{(y+1)^2} < 0 \implies y \textbf{ es un mal.}$$

(b) **Solución.** No puede existir solución interior. En una solución interior debería cumplirse la CPO respecto a y:

$$\frac{\partial u/\partial y}{\partial u/\partial x} = \frac{p_y}{p_x},$$

es decir $-2\sqrt{x}/(y + 1) = 1$, que requiere el lado izquierdo positivo, pero éste es siempre negativo. Por lo tanto no existe punto interior que satisfaga las CPO: el consumidor siempre puede reducir y y mejorar su utilidad.

(c) **Solución.** Como y es un mal, el óptimo es la solución de esquina $y^* = 0$. Con $y^* = 0$ la restricción activa da $p_x x = w$, es decir:

$$\boxed{x^* = w, \qquad y^* = 0.}$$

La utilidad óptima es $u^* = \sqrt{w}$.

(d) **Solución.** La función u viola la **monotonicidad** (no saciedad local) respecto al bien y: aumentar y reduce la utilidad, de modo que y no es un "bien" en el sentido habitual ($\partial u/\partial y < 0$).

2 Ejercicios para la casa

2.1 Preferencias y curvas de indiferencia

1. **TMS decreciente y cuasiconcavidad ($\star$).**

   Solución. La TMS está dada por

$$\text{TMS}(x_1, x_2) = \frac{u_1(x_1, x_2)}{u_2(x_1, x_2)},$$

donde

$$u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \qquad u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

A lo largo de una curva de indiferencia, $u(x_1, x_2(x_1)) = \bar{u}$, por lo que al diferenciar implícitamente respecto de x_1 se obtiene

$$u_1 + u_2 \frac{dx_2}{dx_1} = 0,$$

y por tanto

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{u_1}{u_2}.$$

Queremos derivar la TMS a lo largo de la curva de indiferencia. Como TMS $= \frac{u_1}{u_2}$ depende de x_1 tanto directa como indirectamente a través de $x_2(x_1)$, usamos la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx_1}\left(\frac{u_1}{u_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{u_1}{u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{u_1}{u_2}\right)\frac{dx_2}{dx_1}.$$

Ahora calculamos cada derivada parcial por separado.

Primero, respecto de x_1:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{u_1}{u_2}\right) = \frac{u_{11}u_2 - u_1 u_{21}}{u_2^2}.$$

Como $u_{21} = u_{12}$, esto es

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{u_1}{u_2}\right) = \frac{u_{11}u_2 - u_1 u_{12}}{u_2^2}.$$

Segundo, respecto de x_2:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{u_1}{u_2}\right) = \frac{u_{12}u_2 - u_1 u_{22}}{u_2^2}.$$

Sustituyendo en la regla de la cadena:

$$\frac{d\text{TMS}}{dx_1} = \frac{u_{11}u_2 - u_1 u_{12}}{u_2^2} + \frac{u_{12}u_2 - u_1 u_{22}}{u_2^2}\frac{dx_2}{dx_1}.$$

Como sobre la curva de indiferencia

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{u_1}{u_2},$$

entonces

$$\frac{d\text{TMS}}{dx_1} = \frac{u_{11}u_2 - u_1u_{12}}{u_2^2} - \frac{u_{12}u_2 - u_1u_{22}}{u_2^2}\frac{u_1}{u_2}.$$

Llevando el segundo término a una sola fracción:

$$\frac{d\text{TMS}}{dx_1} = \frac{u_{11}u_2 - u_1u_{12}}{u_2^2} - \frac{u_1(u_{12}u_2 - u_1u_{22})}{u_2^3}.$$

Ahora escribimos el primer término con denominador común u_2^3:

$$\frac{u_{11}u_2 - u_1u_{12}}{u_2^2} = \frac{u_2(u_{11}u_2 - u_1u_{12})}{u_2^3} = \frac{u_{11}u_2^2 - u_1u_{12}u_2}{u_2^3}.$$

Entonces

$$\frac{d\text{TMS}}{dx_1} = \frac{u_{11}u_2^2 - u_1u_{12}u_2}{u_2^3} - \frac{u_1u_{12}u_2 - u_1^2u_{22}}{u_2^3}.$$

Uniendo numeradores:

$$\frac{d\text{TMS}}{dx_1} = \frac{u_{11}u_2^2 - u_1u_{12}u_2 - u_1u_{12}u_2 + u_1^2u_{22}}{u_2^3}.$$

Por tanto,

$$\frac{d\text{TMS}}{dx_1} = \frac{u_{11}u_2^2 - 2u_1u_2u_{12} + u_1^2u_{22}}{u_2^3}.$$

Si u es estrictamente cuasicóncava, por hipótesis $u_2^2u_{11} - 2u_1u_2u_{12} + u_1^2u_{22} < 0$. Dado que $u_2 > 0$ (monotonía), $u_2^3 > 0$, luego:

$$\frac{d\text{TMS}}{dx_1} = \frac{u_2^2u_{11} - 2u_1u_2u_{12} + u_1^2u_{22}}{u_2^3} < 0. \quad \square$$

La expresión en el numerador es precisamente la condición del hessiano orlado para cuasiconcavidad estricta en $\mathbb{R}^2$.

2. Utilidades marginales independientes.

(a) **Solución.** Con $u_{12} = 0$, la fórmula general de la derivada de la TMS a lo largo de la curva de indiferencia es:

$$\frac{d\,\text{TMS}}{dx_1} = \frac{u_2^2\,u_{11} + u_1^2\,u_{22}}{u_2^3}.$$

Por hipótesis $u_1, u_2 > 0$ (monotonicidad) y $u_{11}, u_{22} < 0$ (utilidad marginal decreciente). El numerador es suma de dos términos negativos: $u_2^2u_{11} < 0$ y $u_1^2u_{22} < 0$. Como $u_2^3 > 0$, se concluye $d\,\text{TMS}/dx_1 < 0$. La TMS es decreciente (preferencias convexas). $\square$

(b) **Solución.** $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Aquí $u_{12} = 1 \neq 0$. Verificamos la condición del hessiano orlado:

$$u_2^2 u_{11} - 2u_1 u_2 u_{12} + u_1^2 u_{22} = x_2^2(0) - 2x_1 x_2(1) + x_1^2(0) = -2x_1 x_2 < 0.$$

Por tanto la TMS es decreciente a pesar de $u_{12} \neq 0$. □

3. Bienes que interfieren.

(a) **Solución.** Proponga $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - c\, x_1 x_2$, $c > 0$. (Ejemplo: leche y jugo de naranja.) Individualmente: $\partial u/\partial x_1 = 1 - cx_2 > 0$ para $x_2 < 1/c$, y análogamente para x_2.

(b) **Solución.**

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 1 - cx_2, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 1 - cx_1.$$

$$\text{TMS} = \frac{1 - cx_2}{1 - cx_1}, \quad \text{definida para } x_1 < 1/c \text{ y } x_2 < 1/c.$$

(c) **Solución.**

- **Monotonicidad:** se viola para $x_2 > 1/c$ (o $x_1 > 1/c$) porque $\partial u/\partial x_1 < 0$.
- **Cuasiconcavidad:** el hessiano orlado evaluado con $u_{11} = u_{22} = 0$, $u_{12} = -c$ da $u_2^2(0) - 2u_1 u_2(-c) + u_1^2(0) = 2c(1 - cx_2)(1 - cx_1) > 0$ en la región $x_i < 1/c$, lo que indica cuasiconvexidad, no cuasiconcavidad. Las curvas de indiferencia son cóncavas hacia el origen.

2.2 Maximización de Utilidad

Indicación: revisar el problema de maximización de la utilidad y, para algunos incisos, la definición de función de utilidad indirecta y la identidad de Roy.

1. Leontief ($n = 2$).

(a) **Solución.** Las curvas de indiferencia de $u = \min\{ax_1, bx_2\}$ son en forma de L con vértice en la recta $ax_1 = bx_2$. En cualquier punto fuera del vértice, uno de los dos argumentos del mínimo es estrictamente mayor que el otro. Aumentar ese bien no incrementa la utilidad (la iguala al mínimo del otro bien), de modo que gastar en él es ineficiente. Por tanto el óptimo siempre satisface

$$ax_1^* = bx_2^*.$$

(b) **Solución.** De $ax_1 = bx_2$ se obtiene $x_2 = (a/b)x_1$. Sustituyendo en la restricción activa:

$$p_1 x_1 + p_2 \frac{a}{b} x_1 = w \implies x_1 \frac{bp_1 + ap_2}{b} = w.$$

$$\boxed{x_1(p, w) = \frac{bw}{bp_1 + ap_2}, \qquad x_2(p, w) = \frac{aw}{bp_1 + ap_2}.}$$

(c) **Solución.**

$$v(p,w) = \min\left\{a \cdot \frac{bw}{bp_1 + ap_2},\ b \cdot \frac{aw}{bp_1 + ap_2}\right\} = \frac{abw}{bp_1 + ap_2}.$$

$$\boxed{v(p,w) = \frac{abw}{bp_1 + ap_2}.}$$

2. Leontief (n bienes).

Solución. Generalizando el argumento del ejercicio anterior: en el óptimo todas las ramas del mínimo se igualan, $a_1 x_1 = \cdots = a_n x_n \equiv t$. Así $x_k = t/a_k$. Sustituyendo en la restricción activa: $\sum_k p_k (t/a_k) = w$, de donde $t = w / \sum_j p_j / a_j$.

$$\boxed{x_k(p,w) = \frac{w}{a_k \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_j/a_j}, \qquad v(p,w) = \frac{w}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k/a_k}.}$$

Con $n = 2$, $a_1 = b$ y $a_2 = a$, se recupera el resultado anterior.

3. Stone-Geary (n bienes).

(a) **Solución.** $a_\ell \geq 0$ es la cantidad de **subsistencia** del bien ℓ: el consumidor debe adquirir al menos a_ℓ para que la utilidad esté definida y positiva. $b_\ell > 0$ es la **participación del bien ℓ en el ingreso discrecional** $\hat{w} = w - \sum_j p_j a_j$ (el ingreso que queda tras cubrir la canasta de subsistencia).

(b) **Solución.** Defina $\hat{x}_k = x_k - a_k > 0$ y $\hat{w} = w - \sum_j p_j a_j > 0$. El problema equivale a maximizar $\prod_k \hat{x}_k^{b_k}$ s.a. $\sum_k p_k \hat{x}_k \leq \hat{w}$, que es Cobb-Douglas con exponentes que suman 1. Sus demandas son $\hat{x}_k = b_k \hat{w} / p_k$:

$$\boxed{x_k(p,w) = a_k + \frac{b_k}{p_k}\left(w - \sum_{j=1}^{n} p_j a_j\right).}$$

$$\boxed{v(p,w) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{b_k}{p_k}\right)^{b_k} \cdot \left(w - \sum_{k=1}^{n} p_k a_k\right).}$$

4. CES (n bienes). $u(x) = (\sum_\ell \alpha_\ell x_\ell^\rho)^{1/\rho}$, $\alpha_\ell > 0$, $\rho < 1$, $\rho \neq 0$.

Solución. La misma lógica que en el caso $n = 2$ generaliza directamente. Con $\sigma = 1/(1-\rho)$:

$$\boxed{x_k(p,w) = \frac{\alpha_k^\sigma\, p_k^{-\sigma}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^\sigma\, p_j^{1-\sigma}}\, w, \qquad k = 1, \ldots, n.}$$

Con $P = \left(\sum_j \alpha_j^\sigma p_j^{1-\sigma}\right)^{1/(1-\sigma)}$:

$$\boxed{v(p,w) = w/P.}$$

Casos límite.

- $\rho \to 0$ ($\sigma \to 1$): la función CES tiende a la Cobb-Douglas $u \propto \prod_k x_k^{\alpha_k/\bar{\alpha}}$.
- $\rho = 1$ ($\sigma \to \infty$): $u = \sum \alpha_\ell x_\ell$ (sustitutos perfectos); el consumidor gasta todo en el bien con menor precio ponderado.
- $\rho \to -\infty$ ($\sigma \to 0$): $u \to \min_k\{x_k^{\alpha_k}\}$ (complementos perfectos, Leontief).

5. Cobb-Douglas: demanda y propiedades. $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$, $\alpha, \beta > 0$.

(a) **Solución.** Del ejercicio 2 de la sesión de práctica (con $\bar{\alpha} = \alpha + \beta$):

$$x_1(p,w) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{w}{p_1}, \quad x_2(p,w) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \frac{w}{p_2}, \quad v(p,w) = K\,\frac{w^{\alpha+\beta}}{p_1^\alpha p_2^\beta}.$$

(b) **Solución.**

$$x_1(\lambda p, \lambda w) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{\lambda w}{\lambda p_1} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{w}{p_1} = x_1(p,w). \quad \checkmark$$

Análogamente $x_2(\lambda p, \lambda w) = x_2(p,w)$. Las demandas son homogéneas de grado cero en (p,w): sólo importan los precios relativos y el ingreso real.

(c) **Solución.**

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} w + \frac{\beta}{\alpha+\beta} w = w. \quad \checkmark$$

Resumen comparativo

Utilidad	**Demanda** x_k	$v(p,w)$	σ
Cobb-Douglas	$\frac{\alpha_k}{\bar{\alpha}}\frac{w}{p_k}$	$K\frac{w^{\bar{\alpha}}}{\prod p_k^{\alpha_k}}$	1
Leontief	$\frac{w}{a_k \sum_j p_j/a_j}$	$\frac{w}{\sum_k p_k/a_k}$	0
CES	$\frac{\alpha_k^\sigma p_k^{-\sigma}}{\sum_j \alpha_j^\sigma p_j^{1-\sigma}} w$	$w\left(\sum_j \alpha_j^\sigma p_j^{1-\sigma}\right)^{-1/(1-\sigma)}$	$\frac{1}{1-\rho}$
Stone-Geary	$a_k + \frac{b_k}{p_k}\hat{w}$	$C(p)\,\hat{w}$	variable

Donde $\bar{\alpha} = \sum_k \alpha_k$, $\hat{w} = w - \sum_k p_k a_k$, $C(p) = \prod_k (b_k/p_k)^{b_k}$ y σ es la elasticidad de sustitución.