Facultad de Ciencias Sociales
Especialidad de Economía
Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)
Ciclo 2026-1

Microeconomía 1
Solucionario — Práctica Dirigida 10

Bienes públicos, externalidades y capital en el tiempo

Profesor: José Gallardo Ku
Jefes de práctica: Marcelo Gallardo, Raúl Amao

Bienes públicos y externalidades

Ejercicio 1. *Externalidad de producción, impuesto pigouviano y teorema de Coase.*
Datos: $C_S(s,x) = \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}(a-x)^2$, $C_F(f,x) = \frac{1}{2}f^2 + \frac{\theta}{2}x^2$, con $a = 100$, $\theta = 1$, $p_S = 40$, $p_F = 30$.

(a) Equilibrio descentralizado. La firma contaminante resuelve

$$\max_{s\geq 0,\ 0\leq x\leq a} \Pi_S(s,x) = p_S\, s - \tfrac{1}{2}s^2 - \tfrac{1}{2}(a-x)^2.$$

Antes de plantear las CPO, calculemos con cuidado las derivadas del costo. Por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial C_S}{\partial s} = s, \qquad \frac{\partial C_S}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[\tfrac{1}{2}(a-x)^2\Big] = (a-x)\cdot(-1) = -(a-x) \leq 0 \quad \text{en } [0,a],$$

Observación (regla de la cadena). Sea $u(x) = a - x$, de modo que $\frac{1}{2}(a-x)^2 = \frac{1}{2}\,u(x)^2$. Al derivar una función compuesta hay que multiplicar por la derivada *interna*:

$$\frac{d}{dx}\Big[\tfrac{1}{2}\,u(x)^2\Big] = u(x)\cdot u'(x) = (a-x)\cdot \underbrace{(-1)}_{u'(x)=\frac{d}{dx}(a-x)} = -(a-x).$$

El error típico es escribir $\frac{d}{dx}\big[\frac{1}{2}(a-x)^2\big] = +(a-x)$, olvidando el factor $u'(x) = -1$. Con el signo correcto, $\partial C_S/\partial x = -(a-x)$ y por tanto $\partial \Pi_S/\partial x = -\partial C_S/\partial x = +(a-x)$. Este signo se usa en todo el ejercicio: en (b) da la CPO eficiente $(a-x) - \theta x = 0$; con el signo equivocado se llegaría a $-(a-x) - \theta x = 0$, ecuación sin solución en $[0,a]$ (con $\theta = 1$ el lado izquierdo vale $-a$ en todo punto).

La derivada es estrictamente negativa si $x < a$: la contaminación *reduce* el costo de S (verter es un medio gratuito de disposición; abatir de a hacia abajo es lo costoso). En s la CPO interior es

$$\frac{\partial \Pi_S}{\partial s} = p_S - s = 0 \;\Rightarrow\; s^* = p_S, \qquad \frac{\partial^2 \Pi_S}{\partial s^2} = -1 < 0 \;\checkmark$$

En x, en cambio, *no hay solución interior*: para todo $x \in [0,a)$,

$$\frac{\partial \Pi_S}{\partial x} = -\frac{\partial C_S}{\partial x} = a - x > 0,$$

de modo que Π_S es estrictamente creciente en x sobre $[0,a)$ y el máximo se alcanza en la cota superior (solución de esquina, donde la restricción $x \le a$ se activa):

$$\boxed{x^* = a}.$$

En términos de Kuhn–Tucker: con multiplicador $\mu \ge 0$ para $x \le a$, la condición $a - x = \mu$ junto con $\mu\,(a-x) = 0$ se satisface únicamente en $x = a$ (con $\mu = 0$); cualquier $x < a$ violaría la estacionariedad pues $a - x > 0$. La pesquera no controla x (la sufre como dato) y resuelve

$$\max_f \ \Pi_F = p_F\, f - \tfrac{1}{2}f^2 - \tfrac{\theta}{2}x^2 \ \Rightarrow\ p_F - f = 0 \ \Rightarrow\ f^* = p_F.$$

Numéricamente:

$$s^* = 40, \qquad x^* = 100, \qquad f^* = 30.$$

(b) Asignación eficiente (fusión). La firma fusionada maximiza

$$\Pi_U = \Pi_S + \Pi_F = p_S\, s + p_F\, f - \tfrac{1}{2}s^2 - \tfrac{1}{2}f^2 - \tfrac{1}{2}(a-x)^2 - \tfrac{\theta}{2}x^2.$$

Como los costos son separables, las CPO en s y f no cambian ($s = p_S$, $f = p_F$); lo que cambia es la elección de x, ahora internalizada. Derivando término a término,

$$\frac{\partial \Pi_U}{\partial x} = \underbrace{-\frac{\partial C_S}{\partial x}}_{=\,a-x} \underbrace{-\frac{\partial C_F}{\partial x}}_{=\,-\theta x} = (a-x) - \theta x = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Pi_U}{\partial x^2} = -(1+\theta) < 0 \ \checkmark$$

La solución es ahora interior: en $x = 0$ la derivada vale $a > 0$ y en $x = a$ vale $-\theta a < 0$. Equivalentemente, minimizando el costo conjunto en x,

$$\frac{\partial}{\partial x}\big[C_S + C_F\big] = -(a-x) + \theta x = 0,$$

que es la *misma* ecuación multiplicada por -1. En ambas formas se lee $-\partial C_S/\partial x = \partial C_F/\partial x$: beneficio marginal de contaminar (ahorro de abatimiento, $a-x$) igual al daño marginal (θx). Despejando,

$$a - x = \theta x \ \Rightarrow\ \boxed{\hat{x} = \frac{a}{1+\theta}} = \frac{100}{2} = 50.$$

Así $\hat{x} = 50 < x^* = 100$: el mercado contamina el doble de lo eficiente. La pérdida de eficiencia es la caída del excedente conjunto en su parte dependiente de x, $W(x) = -\frac{1}{2}(a-x)^2 - \frac{\theta}{2}x^2$. Evaluando en $\hat{x} = \dfrac{a}{1+\theta}$, con $a - \hat{x} = \dfrac{a\theta}{1+\theta}$,

$$W(\hat{x}) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2\theta^2}{(1+\theta)^2} - \frac{\theta}{2}\cdot\frac{a^2}{(1+\theta)^2} = -\frac{a^2\theta}{2}\cdot\frac{\theta+1}{(1+\theta)^2} = -\frac{a^2\theta}{2(1+\theta)},$$

$$W(x^*) = W(a) = -\frac{\theta}{2}a^2.$$

Luego

$$W(\hat{x}) - W(x^*) = -\frac{a^2\theta}{2(1+\theta)} + \frac{a^2\theta}{2} = \frac{a^2\theta}{2}\Big(1 - \frac{1}{1+\theta}\Big) = \frac{a^2\theta^2}{2(1+\theta)} = \frac{100^2\cdot 1}{2\cdot 2} = 2500.$$

El equilibrio descentralizado desperdicia 2500 unidades de excedente.

(c) Impuesto pigouviano. Con impuesto t por unidad de contaminación, $\Pi_S = p_S s - \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}(a-x)^2 - t\,x$, y

$$\frac{\partial \Pi_S}{\partial x} = (a-x) - t = 0 \;\Rightarrow\; x(t) = a - t, \qquad \frac{\partial^2 \Pi_S}{\partial x^2} = -1 < 0 \checkmark$$

(interior siempre que $0 < t < a$; el impuesto vuelve costoso el margen de contaminación y restaura la CPO con igualdad). Para inducir $\hat{x} = a/(1+\theta)$ se requiere

$$t^* = a - \frac{a}{1+\theta} = \frac{a\theta}{1+\theta} = \theta\,\hat{x} = \left.\frac{\partial C_F}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}}.$$

El impuesto óptimo iguala el *daño marginal evaluado en el óptimo.* Numéricamente $t^* = \dfrac{100 \cdot 1}{2} = 50$.

(d) Derechos de propiedad y Coase. *(i) F posee el derecho al agua limpia y cobra q por unidad de contaminación.* El comprador de permisos es S, que ahora paga $q\,x$ por contaminar:

$$\max_{s,\,x}\ \Pi_S = p_S\,s - \tfrac{1}{2}s^2 - \tfrac{1}{2}(a-x)^2 - q\,x.$$

CPO (usando de nuevo $\partial/\partial x\,[\frac{1}{2}(a-x)^2] = -(a-x)$):

$$\frac{\partial \Pi_S}{\partial s} = p_S - s = 0 \;\Rightarrow\; s = p_S, \qquad \frac{\partial \Pi_S}{\partial x} = (a-x) - q = 0 \;\Rightarrow\; x^D(q) = a - q,$$

con $\partial^2\Pi_S/\partial x^2 = -1 < 0 \checkmark$. El oferente es F, que recibe $q\,x$ y sufre el daño $\frac{\theta}{2}x^2$; elige cuántos permisos vender:

$$\max_{f,\,x}\ \Pi_F = p_F\,f - \tfrac{1}{2}f^2 - \tfrac{\theta}{2}x^2 + q\,x.$$

CPO:

$$\frac{\partial \Pi_F}{\partial f} = p_F - f = 0 \;\Rightarrow\; f = p_F, \qquad \frac{\partial \Pi_F}{\partial x} = -\theta x + q = 0 \;\Rightarrow\; x^S(q) = \frac{q}{\theta},$$

con $\partial^2\Pi_F/\partial x^2 = -\theta < 0 \checkmark$. Equilibrio del mercado de permisos, $x^D(q) = x^S(q)$:

$$a - q = \frac{q}{\theta} \;\Rightarrow\; a\theta - q\theta = q \;\Rightarrow\; q(1+\theta) = a\theta \;\Rightarrow\; q^* = \frac{a\theta}{1+\theta} = \frac{100\cdot 1}{2} = 50,$$

$$x = a - q^* = a - \frac{a\theta}{1+\theta} = \frac{a}{1+\theta} = \hat{x} = 50.$$

(ii) S posee el derecho a contaminar; F le paga por abatir. Sea el abatimiento $a - x$ y el precio q por unidad abatida. Ahora S recibe $q(a-x)$:

$$\max_{s,\,x}\ \Pi_S = p_S\,s - \tfrac{1}{2}s^2 - \tfrac{1}{2}(a-x)^2 + q\,(a-x).$$

CPO en x (nótese que también $\frac{\partial}{\partial x}[q(a-x)] = -q$ por la misma derivada interna):

$$\frac{\partial \Pi_S}{\partial x} = (a-x) - q = 0 \;\Rightarrow\; x = a - q.$$

Y F paga $q(a-x)$ por el abatimiento:

$$\max_{f,x}\ \Pi_F = p_F\, f - \tfrac{1}{2}f^2 - \tfrac{\theta}{2}x^2 - q\,(a-x), \qquad \frac{\partial \Pi_F}{\partial x} = -\theta x + q = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{q}{\theta}.$$

Mismo sistema de dos ecuaciones que en (i), misma solución: $q^* = 50$, $x = \hat{x} = 50$.

Teorema de Coase. En ambas asignaciones de derechos el nivel negociado es $\hat{x} = a/(1+\theta)$ (el eficiente): con costos de transacción nulos, la negociación agota las ganancias mutuas y el resultado no depende de quién tenga el derecho. Lo que sí cambia es la *distribución del excedente*: en (i) S paga a F (gana F); en (ii) F paga a S (gana S). El derecho determina el reparto, no la eficiencia.

Ejercicio 2. *Bien público puro: Samuelson, agregación vertical y Lindahl.*
Datos: $u_i = x_i + \theta_i \ln G$, $\theta_A = 60$, $\theta_B = 40$, $c = 10$.

(a) Óptimo de Pareto. Con cuasilinealidad el planificador maximiza la suma de utilidades sujeto a recursos. La restricción es $x_A + x_B + cG = m_A + m_B$; despejando el consumo privado agregado, $x_A + x_B = m_A + m_B - cG$, y sustituyendo en $u_A + u_B = x_A + x_B + \theta_A \ln G + \theta_B \ln G$:

$$\max_{G\geq 0}\ \Phi(G) = (m_A + m_B - cG) + \theta_A \ln G + \theta_B \ln G.$$

CPO (derivando término a término, con $\frac{d}{dG}\ln G = 1/G$):

$$\Phi'(G) = -c + \frac{\theta_A}{G} + \frac{\theta_B}{G} = 0 \iff \frac{\theta_A}{G} + \frac{\theta_B}{G} = c, \qquad \Phi''(G) = -\frac{\theta_A + \theta_B}{G^2} < 0\ \checkmark$$

Como $\text{TMS}^i = \dfrac{\partial u_i/\partial G}{\partial u_i/\partial x_i} = \dfrac{\theta_i/G}{1} = \dfrac{\theta_i}{G}$ y $\text{TMT} = c$, esto es la condición de Samuelson

$$\boxed{\text{TMS}^A + \text{TMS}^B = \text{TMT}} \qquad G^* = \frac{\theta_A + \theta_B}{c} = \frac{60+40}{10} = 10.$$

(No depende de m_i por la cuasilinealidad.)

(b) Agregación vertical. Cada $\text{TMS}^i(G) = \theta_i/G$ es la disposición marginal a pagar (demanda inversa) de i. Como el bien es *no rival*, ambos consumen el mismo G; el valor social marginal a un nivel G es la *suma de las disposiciones a pagar a esa misma cantidad*:

$$P(G) = \text{TMS}^A(G) + \text{TMS}^B(G) = \frac{\theta_A + \theta_B}{G}.$$

En un bien privado se suman *cantidades* a un precio común (horizontal); aquí se fija la cantidad y se *suman precios* (vertical). Igualando a $\text{TMT} = c$:

$$\frac{\theta_A + \theta_B}{G} = c \ \Rightarrow\ G^* = \frac{\theta_A + \theta_B}{c} = 10,$$

idéntico al óptimo del planificador.

(c) Precios de Lindahl. Con precio personalizado p_i por unidad de G y $p_A + p_B = c$, el consumidor i gasta $p_i G$ en el bien público y consume $x_i = m_i - p_i G$ del privado; resuelve

$$\max_{G \geq 0} \ \psi_i(G) = (m_i - p_i G) + \theta_i \ln G.$$

CPO y SOC:

$$\psi_i'(G) = -p_i + \frac{\theta_i}{G} = 0 \ \Rightarrow \ \frac{\theta_i}{G} = p_i \ \Rightarrow \ G_i(p_i) = \frac{\theta_i}{p_i}, \qquad \psi_i''(G) = -\frac{\theta_i}{G^2} < 0 \ \checkmark$$

El equilibrio de Lindahl exige que ambos demanden *la misma* cantidad, $G_A(p_A) = G_B(p_B) = G^*$, es decir $p_i = \theta_i / G^*$. Sumando,

$$p_A + p_B = \frac{\theta_A + \theta_B}{G^*} = c \ \Rightarrow \ G^* = \frac{\theta_A + \theta_B}{c} = 10,$$

que reproduce el óptimo de (a). Con $G^* = 10$:

$$p_A = \frac{\theta_A}{G^*} = \frac{60}{10} = 6, \qquad p_B = \frac{\theta_B}{G^*} = \frac{40}{10} = 4, \qquad p_A + p_B = 6 + 4 = 10 = c.$$

Los precios suman el costo marginal, el ingreso cubre la producción y cada agente paga en proporción a su valoración θ_i.

Subdeclaración. El precio de Lindahl se calcula a partir de la preferencia *declarada*, $p_i = \theta_i^{\text{decl}} / G$. Como el bien es no rival, declarar un θ_i menor baja el precio que uno paga sin reducir apreciablemente el G disfrutado (lo financia el otro). Hay entonces incentivo a subdeclarar: el mecanismo no es a prueba de estrategias. Esta es la versión de mercado del problema de revelación de preferencias, que motiva mecanismos tipo Vickrey–Clarke–Groves.

Ejercicio 3. *Descuento continuo, perpetuidades y duración.*

(a) Flujo continuo en $[0,T]$ y perpetuidad.

$$\text{PDV} = \int_0^T e^{-rt}\,dt = \left[-\frac{e^{-rt}}{r}\right]_0^T = \frac{1-e^{-rT}}{r}.$$

Cuando $T\to\infty$, $e^{-rT}\to 0$, de modo que

$$\text{PDV} \xrightarrow[T\to\infty]{} \frac{1}{r}.$$

Interpretación: una renta perpetua de 1 u.m. por unidad de tiempo vale $1/r$. Cuanto mayor la tasa, más se descuenta el futuro y menor el valor presente.

(b) Perpetuidad en tiempo discreto. Pago N al final de cada periodo, tasa i. Es una serie geométrica de razón $\rho = (1+i)^{-1} \in (0,1)$, cuyo primer término es $N\rho$; usando $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n = \dfrac{\rho}{1-\rho}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N}{(1+i)^n} = N\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n = N\cdot\frac{(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}} = N\cdot\frac{(1+i)^{-1}}{\frac{(1+i)-1}{1+i}} = N\cdot\frac{1}{(1+i)-1} = \frac{N}{i}.$$

(c) Paralelismo suma–integral. Subdividamos cada periodo en m subperiodos de longitud $\Delta = 1/m$, con pago $N\Delta$ por subperiodo y tasa i_m tal que $(1+i_m)^m = 1+i$. El valor presente es

$$\sum_{n=1}^{\infty} N\Delta\,(1+i_m)^{-n} = \frac{N\Delta}{i_m}.$$

Cuando $m\to\infty$: de $(1+i_m)^m \to e^r = 1+i$ se sigue $m\ln(1+i_m)\to r$, luego $i_m \approx r/m = r\Delta$, y

$$\sum_{n\ge 1} N\Delta\,(1+i_m)^{-n} \;\longrightarrow\; \int_0^{\infty} Ne^{-rt}\,dt = \frac{N}{r}.$$

La suma geométrica se vuelve la integral, con la correspondencia

$$\boxed{1+i = e^r \iff r = \ln(1+i)} \qquad (r \approx i \text{ para tasas pequeñas}).$$

(d) Duración. Para flujo constante a perpetuidad ($f\equiv 1$, $T\to\infty$) necesitamos $\int_0^\infty t\,e^{-rt}dt$. Integrando por partes con $u=t$, $dv = e^{-rt}dt$ ($du = dt$, $v = -e^{-rt}/r$):

$$\int_0^\infty t\,e^{-rt}\,dt = \underbrace{\left[-\frac{t\,e^{-rt}}{r}\right]_0^\infty}_{=0} + \frac{1}{r}\int_0^\infty e^{-rt}\,dt = \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r} = \frac{1}{r^2},$$

donde el término de frontera se anula porque $t\,e^{-rt} \to 0$ cuando $t \to \infty$ (la exponencial domina) y vale 0 en $t = 0$. Con $\int_0^\infty e^{-rt}dt = 1/r$ de la parte (a),

$$D = \frac{\displaystyle\int_0^\infty t\,e^{-rt}dt}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-rt}dt} = \frac{1/r^2}{1/r} = \boxed{\frac{1}{r}}.$$

El tiempo medio de espera del pago típico es $1/r$: el mismo horizonte que aparece en el valor de la perpetuidad. A mayor r, el peso se concentra en pagos tempranos y la duración cae.

Ejercicio 4. *Momento óptimo de cosecha: interés = tasa de crecimiento.*
$V(t) = \exp\{2\sqrt{t} - 0.15\,t\}$, $\text{PDV}(t) = e^{-rt}V(t)$.

(a) CPO y regla $V'/V = r$. Por la regla del producto, con $\frac{d}{dt}e^{-rt} = -r\,e^{-rt}$,

$$\frac{d}{dt}\big[e^{-rt}V(t)\big] = -r\,e^{-rt}V(t) + e^{-rt}V'(t) = e^{-rt}\big(V'(t) - rV(t)\big) = 0.$$

Como $e^{-rt} > 0$, la CPO es $V'(t) = rV(t)$, es decir

$$\boxed{\frac{V'(t)}{V(t)} = r}.$$

Aquí conviene derivar el logaritmo: $\ln V(t) = 2\sqrt{t} - 0.15\,t$, y

$$\frac{V'}{V} = \frac{d}{dt}\ln V = \frac{d}{dt}\big(2t^{1/2}\big) - 0.15 = 2\cdot\tfrac{1}{2}\,t^{-1/2} - 0.15 = \frac{1}{\sqrt{t}} - 0.15.$$

Igualando a r:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} - 0.15 = r \;\Rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{t}} = r + 0.15 \;\Rightarrow\; \sqrt{t} = \frac{1}{r+0.15} \;\Rightarrow\; t^* = \frac{1}{(r+0.15)^2}.$$

Para $r = 0.05$: $t^* = \dfrac{1}{(0.05+0.15)^2} = \dfrac{1}{(0.20)^2} = \dfrac{1}{0.04} = 25$ (años).

(b) Condición de segundo orden. Sea $\phi(t) = \ln \text{PDV}(t) = 2\sqrt{t} - (0.15 + r)t$. Entonces

$$\phi'(t) = t^{-1/2} - (0.15 + r), \qquad \phi''(t) = -\tfrac{1}{2}\,t^{-3/2} < 0.$$

ϕ es estrictamente cóncava y $\text{PDV} = e^{\phi}$ es transformación monótona, por lo que el punto crítico es máximo global. Equivalentemente, $V'/V = t^{-1/2} - 0.15$ es decreciente, así que la tasa de crecimiento cruza a r una sola vez, de arriba hacia abajo.

(c) Árbol $f(t) = \exp\{0.4\sqrt{t}\}$.

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{d}{dt}\big(0.4\sqrt{t}\big) = \frac{0.2}{\sqrt{t}}.$$

La regla $f'/f = r$ da $\dfrac{0.2}{\sqrt{t}} = r \Rightarrow \sqrt{t} = \dfrac{0.2}{r} \Rightarrow \boxed{t^* = \left(\dfrac{0.2}{r}\right)^2}$. Evaluando:

$$r = 0.04:\; t^* = \left(\tfrac{0.2}{0.04}\right)^2 = 5^2 = 25; \qquad r = 0.05:\; t^* = \left(\tfrac{0.2}{0.05}\right)^2 = 4^2 = 16.$$

Como $t^* = 0.04/r^2$, $\dfrac{dt^*}{dr} = -\dfrac{0.08}{r^3} < 0$: subir r adelanta la cosecha.

(d) Interpretación. Se cosecha cuando la tasa de crecimiento del valor f'/f iguala r: mientras el activo crezca más rápido que la tasa de interés conviene esperar; cuando crece más lento, conviene cortar e invertir el ingreso al r. El costo de plantar K es *aditivo y hundido* ($\max_t e^{-rt}f(t) - K$): se cancela en la CPO y no afecta t^*. Al subir r el futuro se descuenta más, el costo de oportunidad de esperar sube y t^* cae.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 5. *Productor competitivo con producto contaminante.*
$P = 20$, $MC = 0.4q$.

(a) La firma competitiva maximiza $\pi(q) = Pq - C(q)$ con $C'(q) = MC = 0.4q$. CPO y SOC:

$$\pi'(q) = P - MC = 20 - 0.4q = 0 \Rightarrow q^{\text{priv}} = \frac{20}{0.4} = 50, \qquad \pi''(q) = -0.4 < 0 \checkmark$$

(b) El planificador maximiza el excedente $S(q) = Pq - \int_0^q SMC(z)\,dz$ con $SMC = 0.5q$; la CPO es $P = SMC$:

$$20 = 0.5q \Rightarrow q^* = \frac{20}{0.5} = 40.$$

El impuesto especial por unidad corrige la brecha entre costo social y privado *evaluada en el óptimo*:

$$t^* = SMC(q^*) - MC(q^*) = 0.5(40) - 0.4(40) = 20 - 16 = 4.$$

Verificación: con el impuesto la firma enfrenta $MC^{\text{eff}}(q) = 0.4q + 4$ y su CPO es

$$20 = 0.4q + 4 \Rightarrow 0.4q = 16 \Rightarrow q = 40 = q^* \checkmark$$

(c) La pérdida irrecuperable es el área entre SMC y el precio, acumulada sobre las unidades producidas en exceso, $q \in [40, 50]$:

$$\text{DWL} = \int_{40}^{50} \big[SMC(q) - P\big]\,dq = \int_{40}^{50} (0.5q - 20)\,dq = \Big[0.25q^2 - 20q\Big]_{40}^{50}.$$

Evaluando: $0.25(2500) - 20(50) = 625 - 1000 = -375$ y $0.25(1600) - 20(40) = 400 - 800 = -400$, luego

$$\text{DWL} = -375 - (-400) = 25.$$

Geométricamente es el triángulo de base $50 - 40 = 10$ y altura $SMC(50) - P = 25 - 20 = 5$: $\frac{1}{2}(10)(5) = 25 \checkmark$

Ejercicio 6. *Recurso de propiedad común: congestión.*
Lago x: $F_x = 10\ell_x - \frac{1}{2}\ell_x^2$; lago y: $F_y = 5\ell_y$; $\ell_x + \ell_y = 20$.

(a) Acceso libre. Cada pescador captura el *promedio* del lago donde entra, así que se mueven hasta igualar las capturas promedio:

$$\frac{F_x}{\ell_x} = \frac{10\ell_x - \frac{1}{2}\ell_x^2}{\ell_x} = 10 - \tfrac{1}{2}\ell_x, \qquad \frac{F_y}{\ell_y} = \frac{5\ell_y}{\ell_y} = 5.$$

Igualando:

$$10 - \tfrac{1}{2}\ell_x = 5 \Rightarrow \tfrac{1}{2}\ell_x = 5 \Rightarrow \ell_x = 10, \qquad \ell_y = 20 - 10 = 10.$$

Capturas:

$$F_x = 10(10) - \tfrac{1}{2}(100) = 50, \qquad F_y = 5(10) = 50, \qquad \text{total} = 100.$$

(b) Asignación óptima. Se maximiza la captura total sujeta a la mano de obra disponible. Sustituyendo $\ell_y = 20 - \ell_x$:

$$\max_{\ell_x \in [0,20]} \; T(\ell_x) = 10\ell_x - \tfrac{1}{2}\ell_x^2 + 5(20 - \ell_x).$$

CPO y SOC:

$$T'(\ell_x) = 10 - \ell_x - 5 = 0 \;\Rightarrow\; \ell_x^* = 5, \quad \ell_y^* = 15, \qquad T''(\ell_x) = -1 < 0 \checkmark$$

Equivalentemente, se igualan los *productos marginales*: $MP_x = 10 - \ell_x$ y $MP_y = 5$, de donde $10 - \ell_x = 5$. Captura óptima:

$$F_x = 10(5) - \tfrac{1}{2}(25) = 50 - 12.5 = 37.5, \qquad F_y = 5(15) = 75, \qquad \text{total} = 112.5.$$

(El acceso libre sobrepuebla el lago x y desperdicia $112.5 - 100 = 12.5$ pescados.)

(c) Licencia. Bajo acceso libre los pescadores igualan promedios; queremos que igualen marginales. Una tasa τ (en pescados) sobre el lago x hace que el promedio neto en x iguale el de y:

$$\left(10 - \tfrac{1}{2}\ell_x\right) - \tau = 5.$$

En el óptimo $\ell_x = 5$: $7.5 - \tau = 5 \Rightarrow \tau = 2.5$. Es decir, la licencia iguala la brecha entre producto promedio y marginal en x ($7.5 - 5 = 2.5$), que es justamente la externalidad de congestión.

(d) Derechos de propiedad y externalidades. El acceso libre genera sobre-entrada al lago productivo porque cada pescador mira su captura *promedio* e ignora que reduce la de los demás (externalidad negativa = brecha promedio−marginal). Asignar el recurso a un dueño único, o cobrar una licencia igual a la externalidad, internaliza la congestión y restaura la eficiencia. Es la tragedia de los comunes: definir derechos de propiedad $\equiv$ poner precio a la externalidad.

Ejercicio 7. *FPP con un bien público.*
FPP: $100x^2 + y^2 = 5000$; 100 individuos idénticos, $u = \sqrt{x\,y_i}$, $y_i = y/100$.
Cálculos previos. Con $u = (x\,y_i)^{1/2}$, las utilidades marginales son

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \tfrac{1}{2}(x\,y_i)^{-1/2}\,y_i = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y_i}{x}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y_i} = \tfrac{1}{2}(x\,y_i)^{-1/2}\,x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y_i}},$$

de modo que la relación marginal de sustitución individual es

$$\text{TMS}^i = \frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y_i} = \frac{\tfrac{1}{2}\sqrt{y_i/x}}{\tfrac{1}{2}\sqrt{x/y_i}} = \frac{y_i}{x} = \frac{y/100}{x}.$$

De la FPP $100x^2 + y^2 = 5000$, diferenciando implícitamente: $200x\,dx + 2y\,dy = 0$, es decir $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{100x}{y}$, así que la tasa marginal de transformación es

$$\text{TMT} = \left|\frac{dy}{dx}\right| = \frac{100x}{y}.$$

(a) Mercados competitivos. El mercado trata al bien público como si fuese privado: cada individuo iguala su *propia* TMS a la TMT (vía el cociente de precios):

$$\frac{y/100}{x} = \frac{100x}{y} \;\Rightarrow\; y^2 = 10000\,x^2 \;\Rightarrow\; y = 100x.$$

Sustituyendo en la FPP:

$$\begin{aligned} 100x^2 + (100x)^2 = 5000 \;&\Rightarrow\; (100 + 10000)\,x^2 = 5000 \\ &\Rightarrow\; x^2 = \frac{5000}{10100} = \frac{50}{101} \;\Rightarrow\; x = \sqrt{\tfrac{50}{101}} \approx 0.7036, \end{aligned}$$

y $y = 100x = 100\sqrt{50/101} \approx 70.36$. Entonces $y_i = y/100 = x \approx 0.7036$ y la utilidad es

$$u^{\text{comp}} = \sqrt{x\,y_i} = \sqrt{x \cdot x} = x = \sqrt{\tfrac{50}{101}} \approx 0.7036.$$

El bien público queda *subprovisto* (cada agente solo internaliza su propio beneficio).

(b) Óptimo y financiamiento. La condición de Samuelson $\sum_i \text{TMS}^i = \text{TMT}$ con 100 individuos idénticos da $100 \cdot \dfrac{y/100}{x} = \dfrac{y}{x}$, luego

$$\frac{y}{x} = \frac{100x}{y} \;\Rightarrow\; y^2 = 100x^2 \;\Rightarrow\; y = 10x.$$

Sustituyendo en la FPP:

$$\begin{aligned} 100x^2 + (10x)^2 = 5000 \;&\Rightarrow\; (100 + 100)\,x^2 = 5000 \\ &\Rightarrow\; x^2 = \frac{5000}{200} = 25 \;\Rightarrow\; x^* = 5, \quad y^* = 10(5) = 50. \end{aligned}$$

Con $y_i = 50/100 = 0.5$,

$$u^* = \sqrt{x^* y_i} = \sqrt{5 \cdot 0.5} = \sqrt{2.5} \approx 1.58,$$

muy por encima de $u^{\text{comp}} \approx 0.70$.

Tributación. En el óptimo, $\text{TMT} = \dfrac{100(5)}{50} = 10$ pero $\text{TMS}^i = \dfrac{0.5}{5} = 0.1$. El bien público debe financiarse de modo que cada individuo pague solo $1/n = 1/100$ de su costo marginal: un *precio de Lindahl* de $\text{TMT}/n = 10/100 = 0.1$ unidades de y por unidad de x. Esto se implementa gravando el consumo del bien privado y y usando lo recaudado para proveer x hasta $x^* = 5$ (equivalentemente, abrir una cuña de impuestos sobre y que lleve el precio relativo percibido de 10 a 0.1). Sin esa corrección, cada agente trata de pagar solo 0.1 por algo que cuesta 10, y el bien público se subprovee.

Ejercicio 8. *Costo de uso del capital.*

Máquina de precio p, depreciación d, tasa real r.

(a) Tasa de alquiler. En equilibrio competitivo sin beneficios de largo plazo, poseer la máquina un periodo cuesta el interés sobre el capital inmovilizado, $r\,p$, más el desgaste, $d\,p$. El alquiler debe cubrir ese costo de oportunidad:

$$\boxed{v = p(r+d)}.$$

Componentes: $r\,p$ (intereses no ganados al inmovilizar p) y $d\,p$ (depreciación). Numéricamente

$$v = 10000\,(0.05+0.15) = 10000\,(0.20) = 2000.$$

(b) Caso $d=0$. De (a), $v = p(r+0) = pr$, es decir $v/p = r$. Alternativamente, la máquina rinde v a perpetuidad sin desgastarse, igual que un bono perpetuo de cupón v; su precio es el valor presente de esos flujos (serie geométrica del Ejercicio 3(b) con $N = v$, $i = r$):

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v}{(1+r)^n} = \frac{v}{r},$$

consistente con $v = pr$.

(c) Ganancia de capital esperada π. Arbitraje de mantener la máquina un periodo: costo financiero $r\,p$, pérdida por depreciación $d\,p$, ganancia esperada por revalorización $\pi\,p$. El alquiler iguala el costo neto:

$$v = p(r+d) - \pi\,p = \boxed{p(r+d-\pi)}.$$

Si $\pi > r+d$, entonces $v<0$: la revalorización esperada supera el costo de cargar el activo, de modo que los agentes pagarían por tenerlo (alquiler negativo); el activo se vuelve puramente especulativo.

(d) Interpretación. El costo de uso por unidad de precio es

$$\frac{v}{p} = r+d-\pi = \underbrace{r}_{\text{interés}} + \underbrace{d}_{\text{depreciación}} - \underbrace{\pi}_{\text{ganancia de capital}},$$

el costo de uso de Jorgenson: interés más depreciación menos revalorización esperada.

Ejercicio 9. $(*)$ *Regla de Hotelling.*
$\pi = \displaystyle\int_0^{\infty} (p-c)\,q\,e^{-rt}\,dt$, $\dot{x} = -q$, $x(0) = \bar{x}$.

(a) Hamiltoniano y precio sombra constante. Con coestado de valor presente λ asociado a $\dot{x} = -q$,

$$H = (p-c)\,q\,e^{-rt} + \lambda(-q).$$

Condiciones de Pontryagin:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = (p-c)e^{-rt}, \qquad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \text{const},$$

porque H no depende de x. El precio sombra de valor presente del stock es constante a lo largo de la trayectoria óptima.

(b) Regla de Hotelling. De (a), $(p(t) - c(t))\, e^{-rt} = \lambda$ constante. Diferenciando respecto de t con la regla del producto (y $\frac{d}{dt}e^{-rt} = -re^{-rt}$):

$$\frac{d}{dt}\Big[(p-c)e^{-rt}\Big] = (\dot{p} - \dot{c})\, e^{-rt} + (p-c)\,(-r)\, e^{-rt} = 0.$$

Como $e^{-rt} > 0$, se cancela:

$$\dot{p} - \dot{c} - r(p-c) = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\dot{p} = r(p-c) + \dot{c}}.$$

(c) Soluciones. *Caso* $c = 0$. La regla se reduce a $\dot{p} = rp$, EDO lineal homogénea de solución $p(t) = p_0 e^{rt}$ (verificación: $\dot{p} = rp_0 e^{rt} = rp$ ✓).

Caso $c(t) = c_0 e^{\gamma t}$. Como $\dot{c} = \gamma c_0 e^{\gamma t} = \gamma c$, la regla $\dot{p} = r(p-c) + \dot{c}$ se escribe

$$\dot{p} - rp = -rc + \gamma c = (\gamma - r)\, c_0 e^{\gamma t}.$$

La solución homogénea es $p_h = Ae^{rt}$. Para una particular, se ensaya $p_p = Be^{\gamma t}$:

$$\dot{p}_p - rp_p = B\gamma e^{\gamma t} - rBe^{\gamma t} = B(\gamma - r)e^{\gamma t} \stackrel{!}{=} (\gamma - r)c_0 e^{\gamma t} \;\Rightarrow\; B(\gamma - r) = (\gamma - r)c_0 \;\Rightarrow\; B = c_0$$

(si $\gamma \neq r$). La solución general es $p(t) = Ae^{rt} + c_0 e^{\gamma t}$; imponiendo la condición inicial $p(0) = A + c_0 = p_0$ se obtiene $A = p_0 - c_0$, de modo que

$$p(t) = (p_0 - c_0)e^{rt} + c_0 e^{\gamma t}.$$

La renta de escasez es entonces

$$p(t) - c(t) = (p_0 - c_0)e^{rt} + c_0 e^{\gamma t} - c_0 e^{\gamma t} = (p_0 - c_0)e^{rt} :$$

crece exactamente a la tasa r.

(d) Por qué $p - c$ crece a r. La unidad bajo tierra es un activo cuyo valor es la renta de escasez $p - c$. Mantenerlo debe rendir lo mismo que cualquier alternativa: su ganancia de capital $\dot{(p-c)}$ ha de igualar el rendimiento $r(p-c)$ de extraer hoy e invertir el ingreso. Si creciera más lento, convendría extraer todo ya; si más rápido, no extraer nada. El no arbitraje intertemporal fuerza el crecimiento al r.

Ejercicio 10. *Rotación forestal óptima (Faustmann).*

(a) Rotación única ($C = 0$). Vender tras la primera cosecha equivale a $\max_T \; p\, f(T)e^{-rT}$. Por la regla del producto,

$$\frac{d}{dT}\big[pf(T)e^{-rT}\big] = p\, f'(T)\, e^{-rT} + p\, f(T)\,(-r)\, e^{-rT} = p\, e^{-rT}\big(f'(T) - rf(T)\big) = 0.$$

Como $p\, e^{-rT} > 0$,

$$f'(T) = rf(T) \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{f'(T)}{f(T)} = r}.$$

Es la regla del Ejercicio 4: se tala cuando el crecimiento biológico iguala la tasa de interés.

(b) Rotación infinita. Con $V(T) = \dfrac{pf(T)e^{-rT} - C}{1 - e^{-rT}} = \dfrac{N(T)}{D(T)}$, donde $N = pfe^{-rT} - C$ y $D = 1 - e^{-rT}$, calculamos primero

$$N'(T) = p\,f'e^{-rT} + pf\,(-r)e^{-rT} = p\,e^{-rT}(f' - rf), \qquad D'(T) = -(-r)e^{-rT} = r\,e^{-rT}.$$

Por la regla del cociente, $V' = \dfrac{N'D - ND'}{D^2}$, y la condición $V' = 0$ equivale a $N'D = ND'$:

$$p\,e^{-rT}(f' - rf)\left(1 - e^{-rT}\right) = \left(pfe^{-rT} - C\right)r\,e^{-rT}.$$

Cancelando $e^{-rT} > 0$ y notando que el lado derecho es $r\,N = r\,D\,V$ (pues $N = DV$):

$$p(f' - rf)\,D = r\,D\,V \;\Rightarrow\; p(f' - rf) = rV \;\Rightarrow\; \boxed{p\,f'(T) = r\,p\,f(T) + r\,V(T)}.$$

(c) Comparación. El término extra $rV(T) > 0$ es el *costo de oportunidad del terreno*: al retrasar la cosecha se posponen todas las rotaciones futuras y se renuncia al rendimiento r sobre V. Eleva el lado derecho, exige un $pf'(T)$ mayor y, como f'/f es decreciente, se alcanza *antes*: $T_{\text{Faustmann}} < T_{\text{única}}$. Al subir r el futuro se descuenta más, el costo de esperar crece y T^* se acorta ($dT^*/dr < 0$). En el límite $V \to 0$ (p. ej. C o r muy altos) se recupera $f'/f = r$.