

Facultad de Ciencias Sociales

Especialidad de Economía

Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)

Ciclo 2026-1

# Microeconomía 1

## Práctica Calificada 4 — Solucionario

**Profesor:** José Gallardo Ku

**Jefes de práctica:** Marcelo Gallardo, Raúl Amao

---

### Ejercicio 1

(8 puntos)

La función de costos es  $c(\mathbf{w}, q) = w_1q^2 + w_2q$ , con  $\mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}_{++}^2$  y  $q \geq 0$ .

(a) (2 pts) Verificación de las propiedades.

**Solución.** (i) Homogeneidad de grado uno en  $\mathbf{w}$ :

$$c(t\mathbf{w}, q) = tw_1q^2 + tw_2q = t(w_1q^2 + w_2q) = tc(\mathbf{w}, q), \quad t > 0.$$

(ii) No decreciente en  $\mathbf{w}$ :

$$\frac{\partial c}{\partial w_1} = q^2 \geq 0, \quad \frac{\partial c}{\partial w_2} = q \geq 0.$$

(iii) Concavidad en  $\mathbf{w}$ :  $c$  es lineal en  $(w_1, w_2)$ , luego su Hessiano respecto de  $\mathbf{w}$  es la matriz nula, que es semidefinida negativa. Por tanto  $c$  es cóncava (y también convexa) en  $\mathbf{w}$ .

(iv) Comportamiento en  $q$ :

$$\frac{\partial c}{\partial q} = 2w_1q + w_2 > 0, \quad \frac{\partial^2 c}{\partial q^2} = 2w_1 > 0,$$

de modo que  $c$  es creciente y convexa en  $q$ . Se cumplen las cuatro propiedades.

(b) (2 pts) Demandas condicionadas por el lema de Shephard.

**Solución.** Por el lema de Shephard,  $x_i(\mathbf{w}, q) = \partial c / \partial w_i$ :

$$\boxed{x_1(\mathbf{w}, q) = q^2, \quad x_2(\mathbf{w}, q) = q.}$$

Identidad de gasto:

$$w_1x_1 + w_2x_2 = w_1q^2 + w_2q = c(\mathbf{w}, q).$$

Las demandas condicionadas no dependen de los precios, lo que anticipa una tecnología de proporciones fijas.

(c) (2 pts) Recuperación de la tecnología.

**Solución.** De las demandas condicionadas,  $x_1 = q^2$  y  $x_2 = q$ , es decir  $q = \sqrt{x_1}$  y  $q = x_2$  en el óptimo. Para una canasta arbitraria  $(x_1, x_2)$ , la producción máxima está limitada por el factor más escaso:

$$f(x_1, x_2) = \min\{\sqrt{x_1}, x_2\}.$$

Comprobación: para producir  $q$  se requiere  $\sqrt{x_1} \geq q$  (esto es  $x_1 \geq q^2$ ) y  $x_2 \geq q$ ; con precios positivos la minimización de costos satura ambas restricciones,  $x_1 = q^2$  y  $x_2 = q$ , reproduciendo  $c(\mathbf{w}, q) = w_1 q^2 + w_2 q$ . Las isocuantas son en forma de L (Leontief en las variables transformadas  $\sqrt{x_1}$  y  $x_2$ ), con vértice en  $(q^2, q)$ : se trata de una tecnología de proporciones fijas.

(d) (2 pts) Beneficios, demandas no condicionadas y lema de Hotelling.

**Solución.** El problema de la firma es  $\max_{q \geq 0} pq - w_1 q^2 - w_2 q$ . La condición de primer orden es

$$p - 2w_1 q - w_2 = 0 \implies q^*(p, \mathbf{w}) = \frac{p - w_2}{2w_1} \quad (\text{si } p > w_2; q^* = 0 \text{ en otro caso}).$$

La condición de segundo orden se satisface:  $\partial^2(pq - c)/\partial q^2 = -2w_1 < 0$ , un máximo. La función de beneficios, evaluando  $q^*$ ,

$$\pi(p, \mathbf{w}) = (p - w_2)q^* - w_1(q^*)^2 = \frac{(p - w_2)^2}{2w_1} - \frac{(p - w_2)^2}{4w_1},$$

$$\pi(p, \mathbf{w}) = \frac{(p - w_2)^2}{4w_1} \quad (p > w_2).$$

Las demandas no condicionadas se obtienen sustituyendo  $q^*$  en las condicionadas:

$$x_1^N(p, \mathbf{w}) = (q^*)^2 = \frac{(p - w_2)^2}{4w_1^2}, \quad x_2^N(p, \mathbf{w}) = q^* = \frac{p - w_2}{2w_1}.$$

Verificación del lema de Hotelling:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial p} &= \frac{2(p - w_2)}{4w_1} = \frac{p - w_2}{2w_1} = q^*, \\ -\frac{\partial \pi}{\partial w_1} &= \frac{(p - w_2)^2}{4w_1^2} = x_1^N, \\ -\frac{\partial \pi}{\partial w_2} &= \frac{2(p - w_2)}{4w_1} = \frac{p - w_2}{2w_1} = x_2^N. \end{aligned}$$

Las tres identidades se cumplen.

## Ejercicio 2

(4 puntos)

Tecnología  $q = f(K, L) = \min\{K^2, 4L^2\}$ , con precios  $r > 0$  y  $w > 0$ .

(a) Demandas condicionadas.

**Solución.** Se minimiza  $rK + wL$  sujeto a  $\min\{K^2, 4L^2\} \geq q$ . Como ambos factores son costosos, en el óptimo no se desperdicia ninguno: si  $K^2 > 4L^2$  se podría reducir  $K$  sin afectar  $q$ , y si  $4L^2 > K^2$  se podría reducir  $L$ . Por tanto

$$K^2 = 4L^2 = q.$$

Tomando raíces positivas,

$$K^c(w, r, q) = \sqrt{q}, \quad L^c(w, r, q) = \frac{1}{2}\sqrt{q}.$$

(b) Función de costos, lema de Shephard y homogeneidad.

**Solución.**

$$c(w, r, q) = rK^c + wL^c = r\sqrt{q} + \frac{w}{2}\sqrt{q} = \left(r + \frac{w}{2}\right)\sqrt{q}.$$

Lema de Shephard:

$$\frac{\partial c}{\partial r} = \sqrt{q} = K^c, \quad \frac{\partial c}{\partial w} = \frac{1}{2}\sqrt{q} = L^c.$$

Homogeneidad de grado uno en  $(w, r)$ :

$$c(tw, tr, q) = \left(tr + \frac{tw}{2}\right)\sqrt{q} = tc(w, r, q).$$

(c) Costo marginal, costo medio y rendimientos a escala.

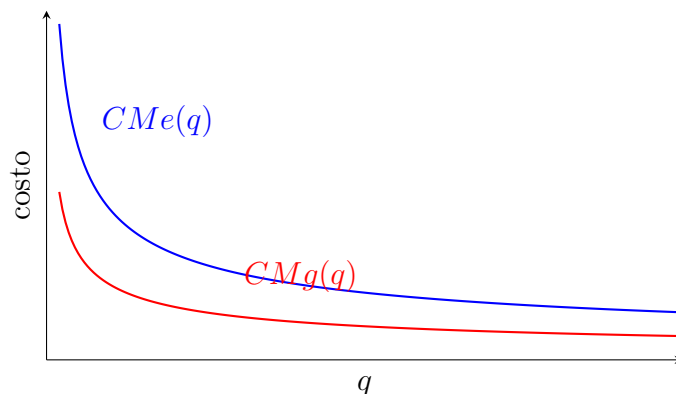
**Solución.** Sea  $A \equiv r + \frac{w}{2} > 0$ , de modo que  $c(q) = A\sqrt{q}$ . Entonces

$$CMg(q) = \frac{\partial c}{\partial q} = \frac{A}{2\sqrt{q}}, \quad CMe(q) = \frac{c(q)}{q} = \frac{A}{\sqrt{q}}.$$

Ambas curvas son decrecientes en  $q$  y  $CMe(q) = 2CMg(q) > CMg(q)$  para todo  $q > 0$ . El costo medio decreciente revela rendimientos crecientes a escala: en efecto,

$$f(tK, tL) = \min\{t^2K^2, 4t^2L^2\} = t^2f(K, L),$$

homogénea de grado dos. Gráficamente:



**Ejercicio 3**

(4 puntos)

Industria competitiva, empresas idénticas con  $c(q) = q^2 + 2q + 4$  (costo fijo = 4, evitable en el largo plazo) y demanda  $Q^D(P) = 100 - 5P$ .

- (a) **(2 pts)** Costo marginal, costo medio, su mínimo y precio de cierre.

**Solución.**

$$CMg(q) = 2q + 2, \quad CMe(q) = \frac{q^2 + 2q + 4}{q} = q + 2 + \frac{4}{q}.$$

El nivel que minimiza el costo medio cumple  $CMg = CMe$ , o bien  $CMe'(q) = 0$ :

$$CMe'(q) = 1 - \frac{4}{q^2} = 0 \implies q^2 = 4 \implies q = 2.$$

Luego

$$CMe^{\min} = CMe(2) = 2 + 2 + 2 = 6,$$

y en efecto  $CMg(2) = 2(2) + 2 = 6 = CMe^{\min}$ .

Precio de cierre (corto plazo): el costo variable es  $CV(q) = q^2 + 2q$ , de modo que el costo variable medio es  $CVMe(q) = q + 2$ , creciente en  $q$ . Su ínfimo se alcanza cuando  $q \rightarrow 0^+$ :

$$P_{\text{cierre}} = \min_{q>0} CVMe(q) = \lim_{q \rightarrow 0^+} (q + 2) = 2.$$

Para  $P < 2$  la empresa no opera en el corto plazo. (En el largo plazo, como el costo fijo es evitable, el piso relevante es  $CMe^{\min} = 6$ .)

- (b) **(2 pts)** Equilibrio de largo plazo.

**Solución.** Con libre entrada y salida, el beneficio económico es nulo y la empresa opera en el mínimo del costo medio. Entonces

$$P^* = CMe^{\min} = 6, \quad q^* = 2.$$

La cantidad de mercado se obtiene de la demanda:

$$Q^* = Q^D(P^*) = 100 - 5(6) = 70.$$

El número de empresas activas es

$$n^* = \frac{Q^*}{q^*} = \frac{70}{2} = 35.$$

$$P^* = 6, \quad q^* = 2, \quad Q^* = 70, \quad n^* = 35.$$

## Ejercicio 4

(4 puntos — *retador*)

$F(K, L)$  de clase  $C^1$ , homogénea de grado uno;  $k = K/L$  y  $f(k) \equiv F(k, 1)$ .

(a) Forma intensiva.

**Solución.** Por homogeneidad de grado uno,  $F(tK, tL) = tF(K, L)$  para todo  $t > 0$ . Tomando  $t = 1/L$ :

$$F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = \frac{1}{L} F(K, L) \implies \boxed{F(K, L) = L f(k), \quad k = \frac{K}{L}.}$$

(b)  $F_K = f'(k)$  por definición de derivada.

**Solución.** Usando  $F(K, L) = L f(K/L)$ ,

$$\begin{aligned} F_K(K, L) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(K+h, L) - F(K, L)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L f\left(\frac{K+h}{L}\right) - L f\left(\frac{K}{L}\right)}{h} \\ &= L \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(k + \frac{h}{L}\right) - f(k)}{h}. \end{aligned}$$

Con el cambio  $\delta = h/L$  (esto es  $h = L\delta$ ),

$$F_K(K, L) = L \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(k + \delta) - f(k)}{L\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(k + \delta) - f(k)}{\delta} = \boxed{f'(k)}.$$

(c)  $F_L$  y agotamiento del producto.

**Solución.** Derivando  $F(K, L) = L f(K/L)$  respecto de  $L$ , con  $\partial(K/L)/\partial L = -K/L^2$ ,

$$F_L(K, L) = f(k) + L f'(k) \left(-\frac{K}{L^2}\right) = f(k) - \frac{K}{L} f'(k) = \boxed{f(k) - k f'(k)}.$$

Con  $r = F_K = f'(k)$  y  $w = F_L = f(k) - k f'(k)$ , y usando  $K = kL$ ,

$$\begin{aligned} rK + wL &= f'(k) K + [f(k) - k f'(k)] L = K f'(k) + L f(k) - \underbrace{kL}_{=K} f'(k) \\ &= L f(k) = F(K, L). \end{aligned}$$

Es el teorema de Euler: bajo rendimientos constantes a escala y retribución de los factores por su productividad marginal, el producto se agota exactamente entre los factores y el beneficio económico es nulo.

(d) Recuperación de  $f$  a partir de  $c(\mathbf{w}, q) = q \min\{w_1 + w_2, w_3 + 2w_4\}$ .

**Solución.** El costo es lineal en  $q$ ,  $c = q g(\mathbf{w})$  con  $g(\mathbf{w}) = \min\{w_1 + w_2, w_3 + 2w_4\}$ , lo que indica rendimientos constantes a escala. El mínimo de dos costos unitarios corresponde a dos actividades alternativas que producen el mismo bien y son perfectamente sustitutas:

- Actividad  $A$ : usa los insumos 1 y 2 en proporción fija 1:1; produce  $\min\{x_1, x_2\}$  a costo unitario  $w_1 + w_2$ .
- Actividad  $B$ : usa los insumos 3 y 4 en proporción 1:2; produce  $\min\{x_3, \frac{1}{2}x_4\}$  a costo unitario  $w_3 + 2w_4$ .

Como las actividades son sustitutas perfectas, la producción total es la suma:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \min\{x_1, x_2\} + \min\left\{x_3, \frac{1}{2}x_4\right\}.$$

Comprobación: para producir  $q = q_A + q_B$ , la actividad  $A$  requiere  $x_1 = x_2 = q_A$  (costo  $(w_1 + w_2)q_A$ ) y la  $B$  requiere  $x_3 = q_B$ ,  $x_4 = 2q_B$  (costo  $(w_3 + 2w_4)q_B$ ). Minimizar concentra toda la producción en la actividad más barata, dando  $c = q \min\{w_1 + w_2, w_3 + 2w_4\}$ .