

Facultad de Ciencias Sociales
 Especialidad de Economía
 Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)
 Ciclo 2026-1

Microeconomía 1

Práctica Calificada 3 — Solucionario

Profesor: José Gallardo Ku

Jefes de práctica: Marcelo Gallardo, Raúl Amao

Pregunta 1 (5 puntos). *Consumo intertemporal con utilidad raíz cuadrada.*

(a) (2 pts) El Lagrangiano del UMP es

$$\mathcal{L} = \sqrt{c_0} + \delta\sqrt{c_1} - \lambda\left(c_0 + \frac{c_1}{1+r} - I\right).$$

Las CPO son

$$\frac{1}{2\sqrt{c_0}} = \lambda, \quad \frac{\delta}{2\sqrt{c_1}} = \frac{\lambda}{1+r}.$$

Dividiendo se obtiene la **ecuación de Euler**:

$$\boxed{\frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{c_0}} = \delta(1+r)} \iff c_1 = \delta^2(1+r)^2 c_0.$$

Sustituyendo en la restricción intertemporal,

$$c_0 + \frac{\delta^2(1+r)^2 c_0}{1+r} = I \implies c_0[1 + \delta^2(1+r)] = I.$$

Por tanto,

$$\boxed{c_0^*(I, r) = \frac{I}{1 + \delta^2(1+r)}, \quad c_1^*(I, r) = \frac{\delta^2(1+r)^2 I}{1 + \delta^2(1+r)}}.$$

(b) (1 pt) **Ahorrador puro:** $I = y_0$ (no depende de r). Entonces

$$\frac{\partial c_0^*}{\partial r} = -\frac{y_0 \delta^2}{[1 + \delta^2(1+r)]^2} < 0.$$

Interpretación. Con dotación de ingresos sólo en $t = 0$, no hay efecto ingreso vía I ; queda únicamente el **efecto sustitución**, que encarece el consumo presente y empuja a posponer.

(c) (1 pt) **Endeudador puro:** $I = y_1/(1+r)$, luego

$$c_0^* = \frac{y_1}{(1+r)[1 + \delta^2(1+r)]} = \frac{y_1}{g(r)},$$

con $g(r) = (1+r) + \delta^2(1+r)^2$. Como $g'(r) = 1 + 2\delta^2(1+r) > 0$, se tiene

$$\frac{\partial c_0^*}{\partial r} = -\frac{y_1 g'(r)}{g(r)^2} < 0.$$

Comparación con (b). En ambos casos el signo es negativo, pero por razones distintas:

- En (b) actúa sólo el efecto sustitución.
- En (c) actúan *simultáneamente* el efecto sustitución y el efecto ingreso (el endeudador es más pobre cuando r sube, pues debe pagar más por trasladar consumo del futuro al presente).

(d) **(1 pt)** En el caso general $I = y_0 + y_1/(1+r)$ y

$$c_0^*(y_0, y_1, r) = \frac{y_0 + y_1/(1+r)}{1 + \delta^2(1+r)}.$$

Derivando,

$$\frac{\partial c_0^*}{\partial y_0} = \frac{1}{1 + \delta^2(1+r)}, \quad \frac{\partial c_0^*}{\partial y_1} = \frac{1/(1+r)}{1 + \delta^2(1+r)}.$$

Por tanto,

$$\frac{\partial c_0^*}{\partial y_1} = \frac{1}{1+r} \frac{\partial c_0^*}{\partial y_0}. \quad \blacksquare$$

Lectura económica. Un sol adicional mañana vale $1/(1+r)$ soles hoy, por lo que su efecto sobre c_0^* es exactamente esa fracción del efecto que tendría un sol hoy: el consumidor responde sólo al *valor presente* de los ingresos.

Pregunta 2 (4 puntos). *Oferta laboral con preferencias Leontief.*

(a) **(1 pt)** La restricción monetaria es $c = wh + V$ y $h = T - \ell$, así que

$$c + w\ell = wT + V \equiv F.$$

El UMP es

$$\max_{(c, \ell) \in \mathbb{R}_+^2} \min\{c, \alpha\ell\} \quad \text{s.a.} \quad c + w\ell = F, \quad \ell \leq T.$$

(b) **(1.5 pts)** Con preferencias Leontief, en el óptimo *interior* se satura la complementariedad: $c^* = \alpha\ell^*$. Sustituyendo en la restricción,

$$\alpha\ell^* + w\ell^* = F \implies \ell^*(w, V) = \frac{wT + V}{\alpha + w}.$$

De ahí,

$$c^*(w, V) = \frac{\alpha(wT + V)}{\alpha + w}, \quad \ell^*(w, V) = \frac{wT + V}{\alpha + w}, \quad h^*(w, V) = \frac{\alpha T - V}{\alpha + w}.$$

$$\text{Aquí } h^* = T - \ell^* = \frac{T(\alpha+w) - (wT+V)}{\alpha+w} = \frac{\alpha T - V}{\alpha+w}.$$

(c) **(1.5 pts)** Si $\alpha T > V$ se tiene $h^* > 0$ (interior) y

$$\frac{\partial h^*}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{\alpha T - V}{\alpha + w} \right] = - \frac{\alpha T - V}{(\alpha + w)^2} < 0.$$

Interpretación. Con bienes perfectamente complementarios no hay sustitución entre ocio y consumo: un aumento del salario relaja la restricción (efecto ingreso puro), y el trabajador consume más ocio (trabaja menos).

Condición para $h^* = 0$. La fórmula $(\alpha T - V)/(\alpha + w)$ es ≤ 0 sí y sólo si

$$V \geq \alpha T.$$

En tal caso, sin trabajar ($h = 0$, $\ell = T$, $c = V$) ya se cumple $c \geq \alpha T = \alpha \ell$, por lo que $\min\{c, \alpha \ell\} = \alpha T$ y trabajar más no eleva la utilidad. Así, $h^* = 0$ es óptimo cuando $V \geq \alpha T$.

Pregunta 3 (4 puntos). *Modelo de dotación-consumo Cobb-Douglas.*

(a) **(1.5 pts)** Con $u(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$ e ingreso endógeno $I = p_x x^E + p_y y^E$, las demandas marshallianas Cobb-Douglas son

$$x(p, \mathbf{w}^E) = \frac{\alpha (p_x x^E + p_y y^E)}{p_x}, \quad y(p, \mathbf{w}^E) = \frac{(1 - \alpha) (p_x x^E + p_y y^E)}{p_y}.$$

La oferta neta de x es

$$s_x = x^E - x = x^E - \frac{\alpha p_x x^E + \alpha p_y y^E}{p_x} = \frac{(1 - \alpha) p_x x^E - \alpha p_y y^E}{p_x}.$$

(b) **(1 pt)** El consumidor es vendedor neto de x sí y sólo si $s_x > 0$, es decir,

$$(1 - \alpha) p_x x^E > \alpha p_y y^E \iff \frac{p_x x^E}{p_y y^E} > \frac{\alpha}{1 - \alpha}.$$

Es decir, vende cuando el *valor* de su dotación de x es desproporcionadamente alto en relación con la fracción óptima del gasto que ese bien debe representar.

(c) **(1.5 pts)** Con $\alpha = \frac{1}{2}$, $\mathbf{w}^E = (4, 1)$, $(p_x, p_y) = (1, 1)$:

$$I = p_x x^E + p_y y^E = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 5, \quad x = \frac{(1/2) \cdot 5}{1} = \frac{5}{2}.$$

Marshalliana directa. Como función de p_x (con $p_y = 1$ fijo y dotación dada):

$$x(p_x) = \frac{(1/2)(4p_x + 1)}{p_x} = 2 + \frac{1}{2p_x} \implies \frac{\partial x}{\partial p_x} \Big|_{p_x=1} = -\frac{1}{2p_x^2} \Big|_{p_x=1} = -\frac{1}{2}.$$

Efecto sustitución (ES). La hicksiana Cobb–Douglas con $\alpha = 1/2$ es $x^h(p, u) = u(p_y/p_x)^{1/2}$, y el nivel de utilidad alcanzado es $u = x^{1/2}y^{1/2} = \sqrt{(5/2)(5/2)} = 5/2$. Entonces

$$\left. \frac{\partial x^h}{\partial p_x} \right|_{(1,1,u)} = u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) p_x^{-3/2} p_y^{1/2} = \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}.$$

Efecto ingreso ordinario (EIO). Con $\partial x/\partial I = \alpha/p_x = 1/2$ y $x = 5/2$,

$$-x \cdot \frac{\partial x}{\partial I} = -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{5}{4}.$$

Efecto ingreso dotación (EID). Con $x^E = 4$ y $\partial x/\partial I = 1/2$,

$$x^E \cdot \frac{\partial x}{\partial I} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Verificación.

$$\text{ES} + \text{EIO} + \text{EID} = -\frac{5}{4} - \frac{5}{4} + 2 = -\frac{1}{2} = \frac{\partial x}{\partial p_x}. \quad \checkmark$$

Lectura. Aunque ES+EIO suman $-5/2$, el efecto dotación (+2) los compensa parcialmente: como el consumidor *posee* 4 unidades de x , un alza de p_x enriquece su ingreso endógeno y mitiga la caída de demanda.

Pregunta 4 (4 puntos). *Demanda agregada y elasticidad.*

(a) **(2 pts)** Los precios de corte (donde cada q_i se anula) son

$$q_1 = 0 \iff P = 40, \quad q_2 = 0 \iff P = 50, \quad q_3 = 0 \iff P = 25.$$

Los **quiebres** de la demanda agregada son entonces $P \in \{25, 40, 50\}$. Sumando consumidores activos en cada tramo,

$$Q(P) = \begin{cases} 400 - 10P, & 0 \leq P \leq 25, \\ 350 - 8P, & 25 < P \leq 40, \\ 150 - 3P, & 40 < P \leq 50, \\ 0, & P > 50. \end{cases}$$

Continuidad en los quiebres.

- $P = 25$: $400 - 10(25) = 150 = 350 - 8(25)$. ✓
- $P = 40$: $350 - 8(40) = 30 = 150 - 3(40)$. ✓
- $P = 50$: $150 - 3(50) = 0$. ✓

La pendiente dQ/dP , en cambio, sufre saltos en cada quiebre: pasa de -10 a -8 en $P = 25$, de -8 a -3 en $P = 40$, y a 0 en $P = 50$ (la demanda es continua pero no diferenciable en los quiebres).

(b) **(2 pts)** Usando $\varepsilon(P) = -(P/Q) dQ/dP$:

En $P = 10$ (tramo $[0, 25]$): $Q(10) = 400 - 100 = 300$, $dQ/dP = -10$.

$$\varepsilon(10) = -\frac{10}{300} \cdot (-10) = \frac{100}{300} = \frac{1}{3} \approx 0.33 < 1.$$

La demanda es **inelástica** en este tramo.

En $P = 30$ (tramo $(25, 40]$): $Q(30) = 350 - 240 = 110$, $dQ/dP = -8$.

$$\varepsilon(30) = -\frac{30}{110} \cdot (-8) = \frac{240}{110} = \frac{24}{11} \approx 2.18 > 1.$$

La demanda es **elástica** en este tramo.

Lectura. A precios bajos hay tres tipos de consumidores activos y la base Q es amplia, por lo que un cambio porcentual de P se traduce en un cambio porcentual pequeño de Q (inelástico). A medida que P sube y consumidores salen del mercado, la base Q se contrae y la sensibilidad relativa aumenta.

Pregunta 5 (3 puntos). *Consumo intertemporal con T períodos.*

(a) **(1.5 pts)** El Lagrangiano del UMP es

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t \sqrt{c_t} - \lambda \left(\sum_{t=0}^{T-1} \frac{c_t}{(1+r)^t} - I \right).$$

La CPO en c_t es

$$\frac{\beta^t}{2\sqrt{c_t}} = \frac{\lambda}{(1+r)^t} \quad (t = 0, 1, \dots, T-1).$$

Dividiendo la CPO en $t+1$ entre la CPO en t :

$$\frac{\beta^{t+1}/(2\sqrt{c_{t+1}})}{\beta^t/(2\sqrt{c_t})} = \frac{(1+r)^t}{(1+r)^{t+1}} \implies \beta \frac{\sqrt{c_t}}{\sqrt{c_{t+1}}} = \frac{1}{1+r}.$$

Reordenando se obtiene la **ecuación de Euler**:

$$\boxed{\frac{\sqrt{c_{t+1}}}{\sqrt{c_t}} = \beta(1+r)} \iff c_{t+1} = [\beta(1+r)]^2 c_t = g c_t.$$

Iterando desde $t = 0$,

$$c_t = g^t c_0, \quad g = [\beta(1+r)]^2. \quad \blacksquare$$

(b) **(1.5 pts)** Sustituyendo $c_t = g^t c_0$ en la restricción intertemporal:

$$\sum_{t=0}^{T-1} \frac{g^t c_0}{(1+r)^t} = c_0 \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{g}{1+r} \right)^t = c_0 \sum_{t=0}^{T-1} \theta^t = I,$$

donde $\theta \equiv g/(1+r) = \beta^2(1+r)$. Para $\theta \neq 1$, la suma geométrica da $\sum_{t=0}^{T-1} \theta^t = (1-\theta^T)/(1-\theta)$, de donde

$$c_0^* = I \cdot \frac{1-\theta}{1-\theta^T}, \quad c_t^* = g^t c_0^*.$$

Monotonidad de la senda. Como $c_{t+1}/c_t = g$, el signo del crecimiento depende de $g \leq 1 \iff \beta(1+r) \leq 1$:

$\beta(1+r) > 1 \Rightarrow$ senda creciente; $\beta(1+r) = 1 \Rightarrow$ senda constante; $\beta(1+r) < 1 \Rightarrow$ senda decreciente

El signo se determina por $\beta(1+r)$, no por $\theta = \beta^2(1+r)$: hay un rango $(1/(1+r), 1/\sqrt{1+r})$ de β en el que $\theta < 1$ pero la senda es creciente.

Límite $T \rightarrow \infty$ con $\theta < 1$. Bajo $\theta < 1$, $\theta^T \rightarrow 0$, y suponiendo que $I_\infty \equiv \sum_{t=0}^{\infty} y_t/(1+r)^t < \infty$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} c_0^* = I_\infty (1-\theta) = I_\infty [1 - \beta^2(1+r)].$$

En particular, si los ingresos son acotados, el consumo inicial óptimo en horizonte infinito es una fracción fija $(1-\theta)$ de la riqueza presente I_∞ , consistente con la *hipótesis del ingreso permanente*.

Fin del solucionario.