Facultad de Ciencias Sociales
Especialidad de Economía
Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) Ciclo 2026-1

Microeconomía 1

Práctica Dirigida 5 — Solucionario

Profesor: José Gallardo Ku (j.gallardo@pucp.edu.pe)
Jefes de práctica: Marcelo Gallardo (marcelo.gallardo@pucp.edu.pe) |
Raúl Amao (raul.amao@pucp.edu.pe)

Los ejercicios marcados con ($\star$) o ($\star\star$) presentan una dificultad mayor o mucho mayor a la de los ejercicios clásicos de las dirigidas o calificadas. Están pensados para los alumnos interesados en profundizar en aspectos axiomáticos o matemáticos del curso. No son ejercicios obligatorios o evaluables en calificada.

Recordatorio teórico

Ecuación de Slutsky

Dado un consumidor que resuelve $\max u(x, y)$ s.a. $p_x x + p_y y = I$, la *demanda marshalliana* $x(p_x, p_y, I)$ y la *hicksiana* $x^h(p_x, p_y, \bar{u})$ se relacionan por

$$\underbrace{\frac{\partial x}{\partial p_x}}_{\text{ET}} = \underbrace{\frac{\partial x^h}{\partial p_x}}_{\text{ES}} - \underbrace{x\,\frac{\partial x}{\partial I}}_{\text{EI}}.$$

Por la concavidad de la función de gasto, $\partial x^h/\partial p_x \leq 0$ (*ley de demanda compensada*). El efecto ingreso puede tener cualquier signo según sea el bien normal o inferior.

Preferencia revelada y axioma débil (WARP)

Si a precios p^0 con ingreso I^0 se elige X^0 y X^1 era asequible ($p^0 \cdot X^1 \leq p^0 \cdot X^0$), entonces X^0 se revela preferida o indiferente a X^1 ($X^0 \succsim^R X^1$).

Axioma débil (WARP). Si $X^0 \succsim^R X^1$ con $X^0 \neq X^1$, entonces $X^1 \not\succsim^R X^0$. Equivalentemente, hay *violación* cuando se cumplen simultáneamente $p^0 \cdot X^1 \leq p^0 \cdot X^0$ y $p^1 \cdot X^0 \leq p^1 \cdot X^1$ con $X^0 \neq X^1$.

Números índices y bienestar

Sean p^0, q^0 y p^1, q^1 los precios y cantidades del periodo base y corriente. Definimos:

$$M = \frac{\sum p^1 q^1}{\sum p^0 q^0}, \quad L_p = \frac{\sum p^1 q^0}{\sum p^0 q^0}, \quad P_p = \frac{\sum p^1 q^1}{\sum p^0 q^1},$$
$$L_Q = \frac{\sum p^0 q^1}{\sum p^0 q^0}, \quad P_Q = \frac{\sum p^1 q^1}{\sum p^1 q^0}.$$

Reglas de inferencia.

- Si $M > L_p$: $\sum p^1 q^1 > \sum p^1 q^0$, es decir, q^0 era asequible hoy y se eligió $q^1 \Rightarrow q^1 \succsim^R q^0$ (mejor en el periodo corriente).
- Si $M < P_p$: $\sum p^0 q^1 < \sum p^0 q^0$, es decir, q^1 era asequible en el periodo base y se eligió $q^0 \Rightarrow q^0 \succsim^R q^1$ (peor en el periodo corriente).
- Si $P_p \leq M \leq L_p$: el caso es no concluyente.

¿Por qué $L_p \geq P_p$? La sustitución hacia bienes que se abaratan hace que q^1 pondere más los bienes con menor crecimiento de precio: el numerador de P_p crece proporcionalmente menos que el de L_p. Por eso L_p sobreestima la inflación (sesgo de Laspeyres) y P_p la subestima (sesgo de Paasche).

Consumo intertemporal

Con preferencias intertemporalmente aditivas $U = u(C_0) + \delta\, u(C_1)$, $\delta = 1/(1+\beta) \in (0,1)$, y restricción $C_0 + C_1/(1+i) = I_0 + I_1/(1+i) \equiv W$, la condición de optimalidad (*ecuación de Euler*) es

$$u'(C_0) \;=\; \delta(1+i)\, u'(C_1).$$

Para CRRA $u(C) = (C^{1-\sigma} - 1)/(1-\sigma)$, esto equivale a $C_1/C_0 = [\delta(1+i)]^{1/\sigma}$, con elasticidad de sustitución intertemporal $\text{EIS} = 1/\sigma$. El caso $\sigma \to 1$ recupera $u(C) = \ln C$, donde $\text{EIS} = 1$ y la Euler se simplifica a $C_1/C_0 = \delta(1+i)$. La utilidad logarítmica es el caso "filo" que separa los regímenes EIS> 1 (ES domina) y EIS< 1 (EI domina) para el ahorrador. La intuición de los efectos sustitución e ingreso de un cambio en i depende de si el agente es ahorrador o endeudador (la línea presupuestal pivota alrededor del punto de dotación $E = (I_0, I_1)$).

Extensión a $T+1$ períodos. Las condiciones de Inada ($u' > 0$, $u'' < 0$, $\lim_{C\to 0^+} u' = \infty$, $\lim_{C\to\infty} u' = 0$) garantizan solución interior y suficiencia de las CPO. Bajo preferencias logarítmicas con horizonte infinito, $C_t^* = (1-\delta)\, W_t$: el consumidor gasta cada período una fracción constante $1-\delta$ de su riqueza vital remanente.

Decisión consumo–ocio

El trabajador maximiza $U(c, \ell)$ sujeto a $c + w\ell = wT + V \equiv M$ (*ingreso completo*). El salario w es el precio del ocio. La condición de optimalidad es $\text{TMS}_{\ell,c} = U_\ell/U_c = w$.

1 Ejercicios para la sesión de práctica

1.1 Ecuación de Slutsky

1. **Función de utilidad cuasilineal.**

   Solución. La condición de tangencia TMS $= u_x/u_y = y = p_x/p_y$ y la restricción $p_x x + p_y y = I$ entregan las marshallianas

$$y(p_x, p_y) = \frac{p_x}{p_y}, \qquad x(p_x, I) = \frac{I}{p_x} - 1.$$

   Análogamente, las hicksianas son

$$y^h(p_x, p_y) = \frac{p_x}{p_y}, \qquad x^h(p_x, p_y, \bar{u}) = \bar{u} - \ln(p_x/p_y).$$

   (a) **Ecuación de Slutsky.**

   Solución. Bien x. Las derivadas son

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} = -\frac{I}{p_x^2}, \quad \frac{\partial x^h}{\partial p_x} = -\frac{1}{p_x}, \quad \frac{\partial x}{\partial I} = \frac{1}{p_x}.$$

   Verificación:

$$-\frac{1}{p_x} - \left(\frac{I}{p_x} - 1\right)\frac{1}{p_x} = -\frac{1}{p_x} - \frac{I - p_x}{p_x^2} = -\frac{I}{p_x^2}. \checkmark$$

   Bien y. Como $\partial y/\partial I = 0$, la ecuación de Slutsky se reduce a $\partial y/\partial p_y = \partial y^h/\partial p_y = -p_x/p_y^2$: en cuasilineal en x, el bien y *no presenta* efecto ingreso.

   (b) **Descomposición ante un aumento de p_x.**

   Solución. Con $p_x = 3$, $p_y = 1$, $I = 150$ (de modo que $x = 49$):

$$\mathrm{ET}_x = -\frac{150}{9} \approx -16{,}67, \quad \mathrm{ES}_x = -\frac{1}{3} \approx -0{,}33, \quad \mathrm{EI}_x = -49 \cdot \frac{1}{3} \approx -16{,}33.$$

   La caída en x es casi enteramente efecto ingreso: el consumo inicial es elevado ($x = 49$) y un encarecimiento de x erosiona significativamente el poder adquisitivo.

   (c) **Descomposición ante un aumento de p_y.**

   Solución.

$$\mathrm{ET}_y = -\frac{p_x}{p_y^2} = -3, \quad \mathrm{ES}_y = -3, \quad \mathrm{EI}_y = 0.$$

   Toda la caída de y es efecto sustitución, propio de la cuasilinealidad en x.

1.2 Preferencia revelada y axioma débil

1. **Tres escenarios presupuestarios.**

   (a) **Relaciones de preferencia revelada.**

   Solución. Del gráfico:

   Escenario 1. En $CF(P, I)$ se elige $(2, 2)$ y $(3, 1)$ es asequible $\Rightarrow X(P, I) \succsim^R X(P'', I'')$.

   Escenario 2. En $CF(P', I')$ se elige $(1, 3)$ y $(2, 2)$ es asequible $\Rightarrow X(P', I') \succsim^R X(P, I)$.

   Escenario 3. En $CF(P'', I'')$ se elige $(3, 1)$ y ambos $(1, 3)$ y $(2, 2)$ son asequibles $\Rightarrow X(P'', I'') \succsim^R X(P', I')$ y $X(P'', I'') \succsim^R X(P, I)$.

   (b) **Consistencia con el WARP.**

   Solución. De (a) tenemos $X(P, I) \succsim^R X(P'', I'')$ y $X(P'', I'') \succsim^R X(P, I)$ con elecciones distintas. Esto es una violación directa del WARP: las elecciones **no son consistentes**.

2. **WARP con datos numéricos.**

   Solución. Con $p^1 = (100, 100)$, $q^1 = (100, 100)$ y $p^2 = (100, 80)$, $q^2 = (120, x)$:

   (i) Cesta 2 asequible cuando se eligió 1: $p^1 \cdot q^2 \leq p^1 \cdot q^1$:

   $$12{,}000 + 100x \leq 20{,}000 \implies x \leq 80.$$

   (ii) Cesta 1 asequible cuando se eligió 2: $p^2 \cdot q^1 \leq p^2 \cdot q^2$:

   $$18{,}000 \leq 12{,}000 + 80x \implies x \geq 75.$$

   La conducta es **inconsistente con el WARP** para $x \in [75, 80]$.

1.3 Números índices y bienestar

1. **Análisis a partir de la ENAHO-Panel.**

   Solución. Datos: $p^0 = (40, 20)$, $q^0 = (6, 20)$; $p^1 = (42, 43)$, $q^1 = (5, 10)$. Calculamos los gastos:

   $$\sum p^0 q^0 = 240 + 400 = 640, \quad \sum p^1 q^1 = 210 + 430 = 640,$$
   $$\sum p^1 q^0 = 252 + 860 = 1112, \quad \sum p^0 q^1 = 200 + 200 = 400.$$

   (a) **Índice de gasto.**

   Solución. $M = 640/640 = 1$, consistente con el dato de ingreso nominal constante.

(b) **Laspeyres.**

Solución. $L_p = 1112/640 \approx 1{,}7375$.

(c) **Paasche.**

Solución. $P_p = 640/400 = 1{,}60$.

(d) **Comparación e interpretación.**

Solución. $M = 1 < P_p = 1{,}60 < L_p \approx 1{,}74$. Como $M < P_p$, $\sum p^0 q^1 = 400 < 640 = \sum p^0 q^0$: la canasta corriente *era asequible* en el periodo base, pero se eligió q^0. Por preferencia revelada, $q^0 \succsim^R q^1$: el consumidor J disfrutó **mayor bienestar en 2024**.

1.4 Consumo intertemporal (modelo de dos períodos)

1. Ahorrador y endeudador puros con preferencias CRRA.

(a) **Demandas óptimas.**

Solución. La Euler $C_0^{-\sigma} = \delta(1+i)\, C_1^{-\sigma}$ entrega $C_1 = [\delta(1+i)]^{1/\sigma} C_0 \equiv g\, C_0$. Sustituyendo en $C_0 + C_1/(1+i) = W$:

$$C_0\,(1+\rho) = W, \qquad \rho \equiv g/(1+i) = \delta^{1/\sigma}(1+i)^{1/\sigma - 1}.$$

Por tanto,

$$\boxed{C_0^* = \frac{W}{1+\rho}, \quad C_1^* = \frac{g\,W}{1+\rho}.}$$

Límite log ($\sigma \to 1$): $g \to \delta(1+i)$, $\rho \to \delta$, y $C_0^* = W/(1+\delta)$.

(b) **Caso ahorrador puro:** $I_0 > 0,\ I_1 = 0$.

Solución. Con $I_1 = 0$, $W = I_0$ y $C_0^* = I_0/(1+\rho)$, luego $S_0^* = I_0\,\rho/(1+\rho) > 0$. Derivando:

$$\frac{\partial C_0^*}{\partial i} = -\frac{I_0}{(1+\rho)^2}\,\frac{\partial \rho}{\partial i}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial i} = \delta^{1/\sigma}\big(\tfrac{1}{\sigma} - 1\big)(1+i)^{1/\sigma - 2}.$$

El signo de $\partial C_0^*/\partial i$ es opuesto al de $1/\sigma - 1$, esto es, igual al de $\sigma - 1$:

$$\boxed{\operatorname{sign}(\partial C_0^*/\partial i) = \operatorname{sign}(\sigma - 1).}$$

Tres regímenes.

- $\sigma < 1$ (EIS>1): ES domina, $C_0^* \downarrow$ con i.
- $\sigma = 1$ (caso log): ES y EI se cancelan, C_0^* invariante.
- $\sigma > 1$ (EIS<1): EI domina, $C_0^* \uparrow$ con i.

(c) **Caso endeudador puro: $I_0 = 0,\ I_1 > 0$.**

Solución. Con $I_0 = 0$, $W = I_1/(1+i)$ y

$$C_0^* = \frac{I_1}{(1+i)(1+\rho)} = \frac{I_1}{(1+i)+g}.$$

Como $\partial g/\partial i = (g/\sigma)/(1+i) > 0$, el denominador es estrictamente creciente en i, luego

$$\boxed{\partial C_0^*/\partial i < 0 \ \text{ para todo } \sigma > 0.}$$

Interpretación. Aquí ambos efectos actúan en la *misma* dirección: ES empuja $C_0 \downarrow$, y el EI *también* (la riqueza vital $W = I_1/(1+i)$ cae). La EIS solo afecta la *magnitud*, no el signo.

(d) **Interpretación gráfica.**

Solución. Un alza de i rota la línea presupuestal en torno a $E = (I_0, I_1)$, haciéndola más inclinada.

- *Ahorrador* (E a la derecha del óptimo): el conjunto factible se amplía (ahorrar paga más). ES reduce C_0, EI aumenta C_0. Balance neto sobre C_0 depende de la EIS.
- *Endeudador* (E a la izquierda del óptimo): el conjunto factible se contrae. ES y EI ambos reducen C_0.

1.5 Decisión consumo–ocio (oferta laboral)

1. Consumo, ocio y oferta laboral Cobb–Douglas.

(a) **Restricción presupuestal.**

Solución. $c = wh + V$ con $h = T - \ell$ entrega

$$c + w\ell = \underbrace{wT + V}_{\equiv M}.$$

M es el ingreso completo (valor monetario de la dotación de tiempo más V); w es el precio del ocio.

(b) **Demandas óptimas y oferta laboral.**

Solución. Con Cobb–Douglas y precios $(1, w)$, las cuotas de gasto son constantes:

$$c^* = \alpha M = \alpha(wT + V), \qquad \ell^* = (1-\alpha)\,\frac{wT + V}{w}.$$

Por tanto,

$$\boxed{h^* = T - \ell^* = \alpha T - (1-\alpha)\,\frac{V}{w}.}$$

Si $V = 0$, $h^* = \alpha T$ es constante en w (cancelación ES–EI típica del caso log/Cobb–Douglas).

(c) **Comparativa estática.**

Solución.

$$\frac{\partial h^*}{\partial w} = (1-\alpha)\,\frac{V}{w^2} \geq 0, \quad \frac{\partial h^*}{\partial V} = -\frac{1-\alpha}{w} < 0, \quad \frac{\partial h^*}{\partial \alpha} = T + \frac{V}{w} > 0.$$

Interpretación.

- $w \uparrow$: la oferta crece estrictamente si $V > 0$ (al subir w, el peso relativo de V en M disminuye y se reduce ocio). Si $V = 0$, ES y EI se cancelan exactamente.
- $V \uparrow$: efecto ingreso positivo sobre el ocio (bien normal); cae h^*.
- $\alpha \uparrow$: más peso al consumo, más horas trabajadas.

(d) **Salario de reserva.**

Solución. $h^* > 0$ requiere $\alpha T > (1-\alpha)V/w$, esto es,

$$w_r = \frac{(1-\alpha)\,V}{\alpha\,T}.$$

Para $w < w_r$, solución de esquina $h^* = 0$ (todo el tiempo en ocio, $c = V$). Si $V = 0$, $w_r = 0$: cualquier salario positivo induce trabajo.

2 Ejercicios para la casa

2.1 Slutsky y propiedades de la demanda compensada

1. **Slutsky para Cobb–Douglas.**

   (a) **Marshallianas y utilidad indirecta.**

   Solución. Las cuotas de gasto son constantes:

   $$x_1(p,w) = \frac{\alpha\, w}{p_1}, \qquad x_2(p,w) = \frac{(1-\alpha)\, w}{p_2}.$$

   Sustituyendo en u:

   $$v(p,w) = w\, \alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}\, p_1^{-\alpha}\, p_2^{-(1-\alpha)}.$$

   (b) **Hicksianas y función de gasto.**

   Solución. Con la misma tangencia y $u(x_1,x_2) = \bar{u}$:

   $$h_1(p,\bar{u}) = \bar{u}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\alpha}, \; h_2(p,\bar{u}) = \bar{u}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{p_1}{p_2}\right)^{\alpha}.$$

   $$e(p,\bar{u}) = \bar{u}\,\frac{p_1^{\alpha}p_2^{1-\alpha}}{\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}}.$$

   (c) **Verificación de Slutsky.**

   Solución. Caso $(1,1)$**.** Con $h_1 = x_1 = \alpha w/p_1$:

   $$\frac{\partial h_1}{\partial p_1} - x_1\frac{\partial x_1}{\partial w} = -\frac{(1-\alpha)\alpha w}{p_1^2} - \frac{\alpha^2 w}{p_1^2} = -\frac{\alpha w}{p_1^2} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1}. \checkmark$$

   Caso $(1,2)$**.** $\partial x_1/\partial p_2 = 0$.

   $$\frac{\partial h_1}{\partial p_2} - x_2\frac{\partial x_1}{\partial w} = \frac{(1-\alpha)\alpha w}{p_1 p_2} - \frac{(1-\alpha)\alpha w}{p_1 p_2} = 0. \checkmark$$

   ES cruzado positivo (sustitutos hicksianos) compensado exactamente por el efecto ingreso.

2. $(\star)$ **Ley de demanda compensada.**

   Solución. Por definición, $h(p^k,\bar{u})$ minimiza el gasto a precios p^k entre las canastas con utilidad $\geq \bar{u}$. Como $h(p^1,\bar{u})$ y $h(p^0,\bar{u})$ alcanzan ambos $\bar{u}$, son factibles para la EMP a precios p^0 y p^1 respectivamente:

   $$p^0 \cdot h(p^0,\bar{u}) \leq p^0 \cdot h(p^1,\bar{u}), \quad p^1 \cdot h(p^1,\bar{u}) \leq p^1 \cdot h(p^0,\bar{u}).$$

   Sumando y reordenando,

   $$(p^1 - p^0)\cdot[h(p^1,\bar{u}) - h(p^0,\bar{u})] \leq 0.$$

2.2 Preferencia revelada e índices

1. WARP con tres observaciones.

(a) **Matriz de gastos $p^t \cdot q^s$.**

Solución.

$p^t \cdot q^s$	$q^1 = (4,2)$	$q^2 = (2,4)$	$q^3 = (3,3)$
$p^1 = (1,2)$	8	10	9
$p^2 = (2,1)$	10	8	9
$p^3 = (1,1)$	6	6	6

La diagonal $(8, 8, 6)$ es el ingreso de cada periodo.

(b) **Verificación del WARP.**

Solución. *Pares* $(1,2)$*:* $p^1 \cdot q^2 = 10 > 8$ y $p^2 \cdot q^1 = 10 > 8$: ninguna era asequible bajo los precios de la otra. Sin relación de preferencia revelada.

Pares $(1,3)$*:* $p^1 \cdot q^3 = 9 > 8$ (q^3 no asequible en $t = 1$); $p^3 \cdot q^1 = 6 = p^3 \cdot q^3$ (q^1 asequible en $t = 3$), luego $q^3 \succsim^R q^1$. Sin contradicción.

Pares $(2,3)$*:* análogo, $q^3 \succsim^R q^2$. Sin contradicción.

Las tres observaciones son **consistentes con el WARP**.

2. Estudiantes universitarios.

(a) **Índices de precios (dos bienes).**

Solución. Datos: enero $(120, 2)$ y $(1, 40)$; julio $(90, 3)$ y $(1, 50)$.

$$\sum p^0 q^0 = 280, \quad \sum p^1 q^0 = 410,$$
$$\sum p^0 q^1 = 220, \quad \sum p^1 q^1 = 320.$$

$$L_p = \frac{410}{280} \approx 1{,}464, \quad P_p = \frac{320}{220} \approx 1{,}455, \quad M = \frac{320}{280} \approx 1{,}143.$$

Como $M < P_p$, el estudiante *está peor* en julio.

(b) **Índices de cantidades.**

Solución. $L_Q = 220/280 \approx 0{,}786$, $P_Q = 320/410 \approx 0{,}780$. Ambos < 1: el volumen consumido se redujo. Coincide con (a): está peor.

(c) **Tres bienes (precios).**

Solución. Añadiendo entretenimiento $(p_3^0, q_3^0) = (20, 4)$, $(p_3^1, q_3^1) = (30, 6)$:

$$\sum p^0 q^0 = 360, \quad \sum p^1 q^0 = 530,$$
$$\sum p^0 q^1 = 340, \quad \sum p^1 q^1 = 500.$$

$$L_p \approx 1{,}472, \quad P_p \approx 1{,}471, \quad M \approx 1{,}389.$$

$M < P_p$: el estudiante está peor.

(d) **Tres bienes (cantidades).**

Solución. $L_Q = 340/360 \approx 0{,}944$, $P_Q = 500/530 \approx 0{,}943$. Ambos < 1: volúmen total cae. Coincide.

3. Inecuación de Laspeyres–Paasche.

Solución. Si las elecciones son consistentes con el WARP, q^0 y q^1 son óptimos (gasto mínimo) en sus respectivos periodos:

$$p^0 \cdot q^0 \le p^0 \cdot q^1, \qquad p^1 \cdot q^1 \le p^1 \cdot q^0.$$

Multiplicando ambas y reordenando,

$$\frac{\sum p^1 q^0}{\sum p^0 q^0} \ge \frac{\sum p^1 q^1}{\sum p^0 q^1},$$

es decir, $L_p \ge P_p$. La intuición: el consumidor sustituye hacia bienes más baratos; q^1 pondera más los bienes con menor p^1/p^0, reduciendo el numerador de P_p frente al de L_p.

4. ($\star\star$) Test de Afriat.

Solución. **Teorema (Afriat, 1967).** Para un conjunto finito de observaciones $\{(p^t, q^t)\}_{t=1}^T$ con $p^t \gg 0$, son equivalentes:

(i) Existe $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ continua, monótona y cóncava que racionaliza los datos: $q^t \in \arg\max_{p^t \cdot q \le p^t \cdot q^t} u(q)$ para todo t.

(ii) Los datos satisfacen GARP: para toda secuencia $t_1, \ldots, t_K = t_1$ con $p^{t_k} \cdot q^{t_k} \ge p^{t_k} \cdot q^{t_{k+1}}$, no puede haber j con desigualdad estricta.

(iii) Existen $\{u_t, \lambda_t\} > 0$ con $u_s \le u_t + \lambda_t\, p^t \cdot (q^s - q^t)$ para todo s, t (desigualdades de Afriat).

GARP es la versión transitiva de la preferencia revelada para datos finitos: WARP basta con dos canastas, pero con tres o más se necesitan ciclos. Lo notable es que la concavidad de u puede imponerse *sin pérdida de generalidad* en datos finitos. Las desigualdades de Afriat dan un método constructivo: $u(q) = \min_t\{u_t + \lambda_t p^t \cdot (q - q^t)\}$ es cóncava, monótona, continua y racionaliza los datos.

2.3 Consumo intertemporal

1. ($\star$) Consumo intertemporal logarítmico con horizonte $T + 1$.

(a) **Inada e interioridad.**

Solución. Para $u(C) = \ln C$: $u'(C) = 1/C > 0$, $u''(C) = -1/C^2 < 0$, $\lim_{C\to 0^+} u' = +\infty$, $\lim_{C\to\infty} u' = 0$. Si $C_t^* = 0$ para algún t, la utilidad marginal en t sería infinita y trasladar consumo desde un período con $C_s^* > 0$ generaría ganancia infinita: contradicción. Además, $U = \sum \delta^t \ln(C_t)$ es estrictamente cóncava y la restricción lineal: las CPO de Lagrange son *suficientes*.

(b) **Restricción consolidada.**

Solución. Dividiendo $A_{t+1} = (1+i)(A_t + I_t - C_t)$ entre $(1+i)^{t+1}$ y sumando telescópicamente para $t = 0, \ldots, T$:

$$\frac{A_{T+1}}{(1+i)^{T+1}} - A_0 = \sum_{t=0}^{T} \frac{I_t - C_t}{(1+i)^t}.$$

Con $A_0 = A_{T+1} = 0$, se obtiene $\sum C_t/(1+i)^t = W$.

(c) **Lagrangiano y CPO.**

Solución.

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{T} \delta^t \ln(C_t) - \lambda \left[\sum_{t=0}^{T} \frac{C_t}{(1+i)^t} - W \right].$$

La CPO en C_t entrega

$$\frac{\delta^t}{C_t} = \frac{\lambda}{(1+i)^t} \implies C_t = \frac{[\delta(1+i)]^t}{\lambda}.$$

Para $t = 0$, $\lambda^* = 1/C_0^*$: el multiplicador es la utilidad marginal de la riqueza vital (teorema de la envolvente).

(d) **Ecuación de Euler.**

Solución. Dividiendo las CPO en t y $t+1$:

$$\boxed{\frac{C_{t+1}}{C_t} = \delta(1+i) \equiv g.}$$

Tres regiones: $g > 1 \Rightarrow$ consumo creciente (premio del mercado domina); $g = 1 \Rightarrow$ consumo plano (regla de Friedman); $g < 1 \Rightarrow$ consumo decreciente (impaciencia domina).

(e) **Solución cerrada.**

Solución. Iterando la Euler, $C_t^* = g^t C_0^*$. Sustituyendo en la restricción consolidada:

$$C_0^* \sum_{t=0}^{T} \left(\frac{g}{1+i} \right)^t = W.$$

Como $g/(1+i) = \delta$ (*aspecto distintivo del caso log*),

$$\sum_{t=0}^{T} \delta^t = \frac{1 - \delta^{T+1}}{1 - \delta},$$

y por tanto

$$\boxed{C_0^* = \frac{1-\delta}{1-\delta^{T+1}} W, \quad C_t^* = [\delta(1+i)]^t \, C_0^*.}$$

La fracción $(1-\delta)/(1-\delta^{T+1})$ no depende de i; i afecta a C_0^* sólo a través de W.

(f) **Elasticidad de sustitución intertemporal.**

Solución. $\ln(C_{t+1}/C_t) = \ln\delta + \ln(1+i)$, luego

$$\boxed{\text{EIS} \equiv \frac{\partial \ln(C_{t+1}/C_t)}{\partial \ln(1+i)} = 1.}$$

(g) **Coherencia con dos períodos.**

Solución. Para $T = 1$,

$$C_0^* = \frac{1-\delta}{1-\delta^2}\,W = \frac{W}{1+\delta},$$

que coincide con el límite log ($\sigma \to 1$, $\rho = \delta$) del ejercicio 5. Asimismo, $C_1^* = \delta(1+i)\,W/(1+\delta)$.

(h) **Horizonte infinito.**

Solución. Cuando $T \to \infty$, $\delta^{T+1} \to 0$ y

$$\boxed{C_0^* \to (1-\delta)\,W.}$$

Más aún, $C_t^* = (1-\delta)\,W_t$ con W_t la riqueza vital remanente: el consumidor gasta cada período una fracción constante $1-\delta$ de su riqueza vital. Es la versión log de la regla de Friedman–ingreso permanente.