

# Microeconomía 1 – Solucionario PD4

JP: Marcelo Gallardo, Raúl Amao

## Convención VC/VE (diapositiva del curso)

$$V^0 = v(p^0, w), V^1 = v(p^1, w).$$

$$VE = e(p^0, V^1) - e(p^0, V^0) = e(p^0, V^1) - w$$

$$VC = e(p^1, V^1) - e(p^1, V^0) = w - e(p^1, V^0)$$

Precio sube  $\Rightarrow VC < 0, VE < 0$  (pérdida). Precio baja  $\Rightarrow VC > 0, VE > 0$  (ganancia).

## 1 Ejercicios de la dirigida

### Ejercicio 1 – Dualidad con cuasilineal

**Datos:**  $u(x, y) = x + \ln(y)$ , precios  $p_x, p_y > 0$ , ingreso  $w > 0$ .

(a) **Problema de Maximización de Utilidad (UMP).**

Planteamos el problema del consumidor:

$$\max_{x, y \geq 0} x + \ln(y) \quad \text{s.a.} \quad p_x x + p_y y = w. \quad (1)$$

**Paso 1 – Lagrangiano.** Construimos el lagrangiano:

$$\mathcal{L} = x + \ln(y) + \lambda(w - p_x x - p_y y). \quad (2)$$

**Paso 2 – Condiciones de primer orden (CPO).** Derivamos respecto a cada variable de elección e igualamos a cero:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 1 - \lambda p_x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{p_x}. \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{1}{y} - \lambda p_y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{y} = \lambda p_y. \quad (4)$$

**Paso 3 – Resolución.** Sustituimos el valor de  $\lambda$  de (3) en (4):

$$\frac{1}{y} = \frac{p_y}{p_x} \quad \Longrightarrow \quad y^* = \frac{p_x}{p_y}. \quad (5)$$

$y^* = \frac{p_x}{p_y}$ . Observación: la demanda óptima de  $y$  **no depende del ingreso**  $w$ . Esta es una propiedad característica de las preferencias cuasilineales: el efecto ingreso sobre el bien que aparece dentro de la función no lineal es nulo.

**Paso 4 – Sustitución en la restricción presupuestal.** Reemplazamos  $y^*$  en la RP para obtener  $x^*$ :

$$p_x x + p_y \cdot \frac{p_x}{p_y} = w \implies p_x x + p_x = w \implies p_x x = w - p_x. \quad (6)$$

Dividiendo ambos lados entre  $p_x$ :

$$x^* = \frac{w}{p_x} - 1 = \frac{w - p_x}{p_x}. \quad (7)$$

**Paso 5 – Utilidad indirecta.** Evaluamos  $u$  en la cesta óptima:

$$v(p_x, p_y, w) = x^* + \ln(y^*) = \frac{w}{p_x} - 1 + \ln\left(\frac{p_x}{p_y}\right). \quad (8)$$

**(b) Problema de Minimización del Gasto (EMP).**

Planteamos:

$$\min_{x, y \geq 0} p_x x + p_y y \quad \text{s.a.} \quad x + \ln(y) \geq \bar{u}. \quad (9)$$

**Paso 1 – Lagrangiano.**

$$\mathcal{L} = p_x x + p_y y + \mu(\bar{u} - x - \ln(y)). \quad (10)$$

**Paso 2 – CPO.**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = p_x - \mu = 0 \implies \mu = p_x. \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = p_y - \frac{\mu}{y} = 0 \implies p_y = \frac{\mu}{y}. \quad (12)$$

**Paso 3 – Resolución.** Sustituimos  $\mu = p_x$  de (11) en (12):

$$p_y = \frac{p_x}{y} \implies y^h = \frac{p_x}{p_y}. \quad (13)$$

De la restricción activa  $x + \ln(y) = \bar{u}$ , despejamos  $x$ :

$$x^h = \bar{u} - \ln\left(\frac{p_x}{p_y}\right). \quad (14)$$

$$\text{Así, } y^h = \frac{p_x}{p_y}, \quad x^h = \bar{u} - \ln\left(\frac{p_x}{p_y}\right).$$

**Paso 4 – Función de gasto.** Evaluamos el gasto en las demandas hicksianas:

$$e = p_x x^h + p_y y^h = p_x \left[ \bar{u} - \ln\left(\frac{p_x}{p_y}\right) \right] + p_y \cdot \frac{p_x}{p_y}. \quad (15)$$

Simplificando el segundo término:  $p_y \cdot p_x/p_y = p_x$ . Entonces:

$$e = p_x \bar{u} - p_x \ln\left(\frac{p_x}{p_y}\right) + p_x. \quad (16)$$

Así,

$$e(p_x, p_y, \bar{u}) = p_x \left[ \bar{u} - \ln\left(\frac{p_x}{p_y}\right) + 1 \right].$$

**(c) Verificación de las relaciones de dualidad.**

**Primera relación:**  $e(p, v(p, w)) = w$ .

Sustituimos  $\bar{u} = v = \frac{w}{p_x} - 1 + \ln\left(\frac{p_x}{p_y}\right)$  en la función de gasto:

$$\begin{aligned} e &= p_x \left[ \frac{w}{p_x} - 1 + \ln\left(\frac{p_x}{p_y}\right) - \ln\left(\frac{p_x}{p_y}\right) + 1 \right] \\ &= p_x \cdot \frac{w}{p_x} \\ &= w. \end{aligned} \quad (17)$$

Los términos  $-1$  y  $+1$  se anulan entre sí, al igual que los dos logaritmos con signos opuestos, dejando únicamente  $w$ .

**Segunda relación:**  $v(p, e(p, \bar{u})) = \bar{u}$ .

Sustituimos  $w = p_x \left[ \bar{u} - \ln\left(\frac{p_x}{p_y}\right) + 1 \right]$  en la utilidad indirecta:

$$\begin{aligned} v &= \frac{p_x \left[ \bar{u} - \ln\left(\frac{p_x}{p_y}\right) + 1 \right]}{p_x} - 1 + \ln\left(\frac{p_x}{p_y}\right) \\ &= \bar{u} - \ln\left(\frac{p_x}{p_y}\right) + 1 - 1 + \ln\left(\frac{p_x}{p_y}\right) \\ &= \bar{u}. \end{aligned} \quad (18)$$

Nuevamente los logaritmos se anulan y las constantes se eliminan.

**(d) Gráfico de demanda ordinaria vs. compensada.**

*Para el bien y:* La demanda ordinaria es  $y^* = p_x/p_y$  y la demanda compensada es  $y^h = p_x/p_y$ . Ambas son **idénticas**, porque  $\partial y^*/\partial w = 0$ : no hay efecto ingreso sobre  $y$ . Graficadas en el plano  $(y, p_y)$  con  $p_x$  fijo, ambas curvas se superponen exactamente como una hipérbola  $p_y = p_x/y$ .

*Para el bien x:* La demanda ordinaria es  $x^* = w/p_x - 1$ , que depende de  $w$  y  $p_x$ . La demanda compensada es  $x^h = \bar{u} - \ln(p_x/p_y)$ , que depende de  $\bar{u}$  y  $p_x$ . En general difieren, pero coinciden

cuando evaluamos  $\bar{u} = v(p, w)$ . Graficadas en el plano  $(x, p_x)$ , la marshalliana tiene pendiente  $-w/p_x^2$ , y ambas se cruzan en el punto donde  $\bar{u} = v$ .

La razón económica: con preferencias cuasilineales, el efecto ingreso sobre  $y$  es exactamente cero, por lo que la hicksiana y la marshalliana de  $y$  coinciden. En cambio,  $x$  absorbe todo el efecto ingreso (es el “residuo” lineal).

## Ejercicio 2 – Variación Compensada con Cobb-Douglas

**Datos:**  $u = x^{1/2} y^{1/2}$ ,  $I = 100$ ,  $p_y = 1$ . Precio de  $x$ :  $p_x = 1 \rightarrow p'_x = p$ .

**(A) Cesta óptima y utilidad antes del cambio** ( $p_x = p_y = 1$ ).

Con preferencias Cobb-Douglas simétricas ( $\alpha = 1/2$ ), las demandas son:

$$x^0 = \frac{\alpha I}{p_x} = \frac{(1/2)(100)}{1} = 50. \quad (19)$$

$$y^0 = \frac{(1 - \alpha) I}{p_y} = \frac{(1/2)(100)}{1} = 50. \quad (20)$$

La utilidad inicial es:

$$V^0 = (x^0)^{1/2} (y^0)^{1/2} = \sqrt{50} \cdot \sqrt{50} = 50. \quad (21)$$

Así,  $(x^0, y^0) = (50, 50)$ ,  $V^0 = 50$ .

**(B) Cesta óptima y utilidad después del cambio** ( $p_x = p$ ,  $p_y = 1$ ).

Las demandas con el nuevo precio son:

$$x^1 = \frac{\alpha I}{p} = \frac{50}{p}, \quad y^1 = \frac{(1 - \alpha) I}{p_y} = 50. \quad (22)$$

La utilidad final es:

$$V^1 = \left(\frac{50}{p}\right)^{1/2} \cdot (50)^{1/2} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{p}} \cdot \sqrt{50} = \frac{50}{\sqrt{p}}. \quad (23)$$

Así,  $(x^1, y^1) = \left(\frac{50}{p}, 50\right)$ ,  $V^1 = \frac{50}{\sqrt{p}}$ .

**(C) Variación compensada.**

Para obtener la VC necesitamos la función de gasto. La función de gasto de una Cobb-Douglas  $u = x^\alpha y^{1-\alpha}$  con  $\alpha = 1/2$  y  $p_y = 1$  es:

$$e(p_x, 1, \bar{u}) = \frac{\bar{u}}{\alpha^\alpha (1 - \alpha)^{1-\alpha}} p_x^\alpha p_y^{1-\alpha} = \frac{\bar{u}}{(1/2)^{1/2} (1/2)^{1/2}} \sqrt{p_x} = 2 \bar{u} \sqrt{p_x}. \quad (24)$$

Verificamos que esta función recupera el ingreso original:  $e(1, 1, 50) = 2 \cdot 50 \cdot 1 = 100 = I$ .

Ahora aplicamos la fórmula  $VC = I - e(p, 1, V^0)$ :

$$e(p, 1, V^0) = 2 \cdot 50 \cdot \sqrt{p} = 100\sqrt{p}. \quad (25)$$

$$VC = 100 - 100\sqrt{p} = 100(1 - \sqrt{p}). \quad (26)$$

**Interpretación:**

*Caso  $p > 1$  (el bien  $x$  se encarece):* Como  $\sqrt{p} > 1$ , se tiene  $VC < 0$ , indicando una pérdida de bienestar. El consumidor necesitaría recibir  $100(\sqrt{p} - 1)$  soles adicionales a los precios finales para mantener su utilidad original  $V^0$ . Por ejemplo, si  $p = 4$ , entonces  $VC = 100(1 - 2) = -100$  soles.

*Caso  $0 < p < 1$  (el bien  $x$  se abarata):* Como  $\sqrt{p} < 1$ , se tiene  $VC > 0$ , indicando una ganancia de bienestar. Se le podría extraer hasta  $100(1 - \sqrt{p})$  soles sin que empeore respecto a su nivel de utilidad original. Por ejemplo, si  $p = 1/4$ , entonces  $VC = 100(1 - 1/2) = 50$  soles.

**Ejercicio 3 – Daron y Jim en el mercado**

**Datos:**  $p_1 = 4, p_2 = 2, w = 24$ .

**DARON:**  $u^D = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$  (Cobb-Douglas,  $\alpha = 1/2$ ).

**(a) UMP de Daron.**

Las demandas marshallianas de una Cobb-Douglas  $u = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$  son  $x_i = \alpha_i w/p_i$ , con  $\alpha_1 = \alpha$  y  $\alpha_2 = 1 - \alpha$ . Aplicando:

$$x_1^* = \frac{\alpha w}{p_1} = \frac{(1/2)(24)}{4} = \frac{12}{4} = 3. \quad (27)$$

$$x_2^* = \frac{(1 - \alpha) w}{p_2} = \frac{(1/2)(24)}{2} = \frac{12}{2} = 6. \quad (28)$$

La utilidad indirecta es:

$$v^D = \sqrt{x_1^* \cdot x_2^*} = \sqrt{3 \cdot 6} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4.24. \quad (29)$$

Así, para Daron:  $(x_1^*, x_2^*) = (3, 6), \quad v^D = 3\sqrt{2}$ .

**(b) EMP de Daron.**

Las demandas hicksianas de la Cobb-Douglas simétrica ( $\alpha = 1/2$ ) se obtienen del EMP. Las fórmulas generales son:

$$h_1 = \bar{u} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1-\alpha} = \bar{u} \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} = \bar{u} \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\bar{u}}{\sqrt{2}}. \quad (30)$$

$$h_2 = \bar{u} \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^\alpha = \bar{u} \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} = \bar{u} \sqrt{\frac{4}{2}} = \bar{u} \sqrt{2}. \quad (31)$$

La función de gasto es:

$$e = p_1 h_1 + p_2 h_2 = 4 \cdot \frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} + 2 \cdot \bar{u} \sqrt{2}. \quad (32)$$

Simplificamos  $\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ , de modo que:

$$e = 2\bar{u}\sqrt{2} + 2\bar{u}\sqrt{2} = 4\bar{u}\sqrt{2}. \quad (33)$$

En forma general:  $e(p_1, p_2, \bar{u}) = 2\bar{u}\sqrt{p_1 p_2}$ .

Evaluando en  $\bar{u} = v^D = 3\sqrt{2}$ , verificamos que las hicksianas recuperan las marshallianas:

$$h_1 = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3 = x_1^*, \quad h_2 = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot 2 = 6 = x_2^*. \quad (34)$$

Por ende, para Daron:  $h_1 = \frac{\bar{u}}{\sqrt{2}}$ ,  $h_2 = \bar{u}\sqrt{2}$ ,  $e = 2\bar{u}\sqrt{p_1 p_2} = 4\bar{u}\sqrt{2}$ .

**(c) Dualidad de Daron.**

Primera relación:

$$e(p, v^D) = 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{4 \cdot 2} = 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 6\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 6 \cdot 2 \cdot 2 = 24 = w. \quad (35)$$

Segunda relación:

$$v(p, e(p, \bar{u})) = \frac{e}{2\sqrt{p_1 p_2}} = \frac{2\bar{u}\sqrt{p_1 p_2}}{2\sqrt{p_1 p_2}} = \bar{u}. \quad (36)$$

Ambas relaciones de dualidad se cumplen para Daron.

**JIM:**  $u^J = \min\{x_1, 2x_2\}$  (**Leontief**).

**(a) UMP de Jim.**

Con complementos perfectos, la solución óptima se encuentra siempre en el vértice de la isocuanta, donde ambos argumentos del mínimo son iguales:

$$x_1 = 2x_2. \quad (37)$$

Sustituimos esta condición en la restricción presupuestal:

$$p_1(2x_2) + p_2 x_2 = (2p_1 + p_2) x_2 = w. \quad (38)$$

$$x_2^* = \frac{w}{2p_1 + p_2} = \frac{24}{2(4) + 2} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}. \quad (39)$$

$$x_1^* = 2x_2^* = \frac{2 \cdot 24}{10} = \frac{24}{5}. \quad (40)$$

La utilidad indirecta es:

$$v^J = \min \left\{ \frac{24}{5}, 2 \cdot \frac{12}{5} \right\} = \min \left\{ \frac{24}{5}, \frac{24}{5} \right\} = \frac{24}{5}. \quad (41)$$

En forma general:  $v^J = \frac{2w}{2p_1 + p_2}$ . Así, para Jim:  $(x_1^*, x_2^*) = \left( \frac{24}{5}, \frac{12}{5} \right)$ ,  $v^J = \frac{24}{5} = 4.8$ .

**(b) EMP de Jim.**

En el EMP, buscamos la cesta de costo mínimo que alcanza  $\bar{u}$ . Nuevamente, la solución está en el vértice, donde:

$$x_1 = \bar{u}, \quad x_2 = \frac{\bar{u}}{2}. \quad (42)$$

Las demandas hicksianas y la función de gasto son:

$$h_1 = \bar{u}, \quad h_2 = \frac{\bar{u}}{2}. \quad (43)$$

$$e = p_1 \bar{u} + p_2 \cdot \frac{\bar{u}}{2} = \bar{u} \left( p_1 + \frac{p_2}{2} \right) = \bar{u}(4 + 1) = 5\bar{u}. \quad (44)$$

Por ende, para Jim:  $h_1 = \bar{u}$ ,  $h_2 = \frac{\bar{u}}{2}$ ,  $e = \bar{u} \left( p_1 + \frac{p_2}{2} \right) = 5\bar{u}$ .

**(c) Dualidad de Jim.**

Primera relación:

$$e(p, v^J) = 5 \cdot \frac{24}{5} = 24 = w. \quad (45)$$

Segunda relación:

$$v(p, e(p, \bar{u})) = \frac{2e}{2p_1 + p_2} = \frac{2 \cdot 5\bar{u}}{10} = \bar{u}. \quad (46)$$

Ambas relaciones de dualidad se cumplen para Jim.

**(d) ¿Quién se beneficia más de una rebaja de 1 sol/kg en frutas? ( $p_1 : 4 \rightarrow 3$ ).**

Para comparar bienestar *entre* consumidores usamos medidas monetarias (VC, VE,  $\Delta EC$ ), que son invariantes a transformaciones monótonas de la utilidad y por ende están bien definidas en soles.<sup>a</sup>

*Notación:*  $p^0 = (4, 2)$ ,  $p^1 = (3, 2)$ ,  $w = 24$ .

**Paso 1 – Daron (Cobb-Douglas).** Recordamos del ejercicio anterior:  $v^D(p, w) = \frac{w}{2\sqrt{p_1 p_2}}$

y  $e^D(p, \bar{u}) = 2\bar{u}\sqrt{p_1 p_2}$ .

*Utilidades:*

$$V^{0,D} = \frac{24}{2\sqrt{4 \cdot 2}} = \frac{24}{4\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}, \quad V^{1,D} = \frac{24}{2\sqrt{3 \cdot 2}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}.$$

*Variación Compensada* [ $VC = w - e(p^1, V^0)$ ]:

$$e(p^1, V^{0,D}) = 2(3\sqrt{2})\sqrt{3 \cdot 2} = 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = 6\sqrt{12} = 12\sqrt{3},$$

$$VC^D = 24 - 12\sqrt{3} \approx 3.22 \text{ soles.}$$

*Variación Equivalente* [ $VE = e(p^0, V^1) - w$ ]:

$$e(p^0, V^{1,D}) = 2(2\sqrt{6})\sqrt{4 \cdot 2} = 4\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{12} = 16\sqrt{3},$$

$$VE^D = 16\sqrt{3} - 24 \approx 3.71 \text{ soles.}$$

*Cambio en excedente del consumidor* [ $\Delta EC = -\int_{p_1^0}^{p_1^1} x_1 dp_1$ ] con  $x_1(p_1) = w/(2p_1) = 12/p_1$ :

$$\Delta EC^D = -\int_4^3 \frac{12}{t} dt = -12[\ln t]_4^3 = -12(\ln 3 - \ln 4) = 12 \ln(4/3) \approx 3.45 \text{ soles.}$$

*Sanity check:* las tres medidas son positivas (la rebaja es una ganancia, consistente con la convención  $VC, VE > 0$  cuando el precio baja) y satisfacen el ordenamiento canónico para un bien normal con  $p_1$  a la baja:

$$VC^D = 3.22 \leq \Delta EC^D = 3.45 \leq VE^D = 3.71. \quad \checkmark$$

**Paso 2 – Jim (Leontief).** Recordamos:  $v^J(p, w) = \frac{2w}{2p_1 + p_2}$  y  $e^J(p, \bar{u}) = \bar{u}(p_1 + p_2/2)$ .

*Utilidades:*

$$V^{0,J} = \frac{2(24)}{2(4) + 2} = \frac{48}{10} = \frac{24}{5}, \quad V^{1,J} = \frac{2(24)}{2(3) + 2} = \frac{48}{8} = 6.$$

*Variación Compensada:*

$$e(p^1, V^{0,J}) = \frac{24}{5}(3 + 2/2) = \frac{24}{5} \cdot 4 = \frac{96}{5},$$

$$VC^J = 24 - \frac{96}{5} = \frac{24}{5} = 4.80 \text{ soles.}$$

*Variación Equivalente:*

$$e(p^0, V^{1,J}) = 6(4 + 2/2) = 6 \cdot 5 = 30,$$

$$VE^J = 30 - 24 = 6.00 \text{ soles.}$$

*Cambio en excedente del consumidor* con  $x_1(p_1) = 2w/(2p_1 + p_2) = 24/(p_1 + 1)$ :

$$\Delta EC^J = -\int_4^3 \frac{24}{t+1} dt = -24[\ln(t+1)]_4^3 = -24(\ln 4 - \ln 5) = 24 \ln(5/4) \approx 5.36 \text{ soles.}$$

*Sanity check:* de nuevo las tres medidas son positivas y satisfacen el ordenamiento canónico:

$$VC^J = 4.80 \leq \Delta EC^J = 5.36 \leq VE^J = 6.00. \quad \checkmark$$

Nótese además que  $VC^J = x_1^{*,J} = 24/5$  *exactamente* (no por aproximación): como Leontief tiene efecto sustitución cero,  $h_1$  es constante en  $p_1$ , de modo que  $\int_{p_1^0}^{p_1^1} h_1 dp_1 = h_1 \cdot \Delta p_1$  es exacto.

### Paso 3 – Comparación.

Consumidor	VC (soles)	VE (soles)	$\Delta EC$ (soles)	$x_1^* \cdot  \Delta p_1 $
Daron (CD)	$24 - 12\sqrt{3} \approx 3.22$	$16\sqrt{3} - 24 \approx 3.71$	$12 \ln(4/3) \approx 3.45$	3
Jim (Leontief)	$24/5 = 4.80$	6.00	$24 \ln(5/4) \approx 5.36$	$24/5 = 4.8$

En las tres medidas monetarias, las cifras de Jim superan a las de Daron. Por lo tanto, **Jim se beneficia más de la rebaja**, y esta conclusión es robusta: no depende de la representación cardinal elegida para ninguna de las dos utilidades.

**Intuición a primer orden.** Para un cambio pequeño  $|\Delta p_1|$ , las tres medidas se aproximan por  $x_1^* \cdot |\Delta p_1|$  (área de un rectángulo bajo la curva de demanda). La última columna de la tabla muestra esta aproximación:

$$x_1^{*,D} = 3 < x_1^{*,J} = \frac{24}{5} = 4.8.$$

Las medidas exactas confirman el orden (3.22, 3.45, 3.71 vs. 4.80, 5.36, 6.00): Jim consume más frutas y por ende cada sol de rebaja le ahorra más dinero *en magnitudes monetarias bien definidas*. Esta es la versión correcta de la intuición que se busca: el comparativo es legítimo precisamente porque  $x_1^*$  *sí* es invariante a transformaciones monótonas (el UMP entrega la misma cesta óptima para  $u$  y para cualquier  $f(u)$  creciente).

**Lectura económica.** Jim, con complementos perfectos, no puede sustituir frutas por verduras: consume en proporción fija  $x_1 = 2x_2$ . La rebaja le permite expandir simultáneamente ambos bienes en su proporción óptima. Daron, con Cobb-Douglas, recompone su cesta sustituyendo entre bienes, pero su consumo inicial de frutas era menor y por ende el efecto-precio sobre su gasto es más moderado.

<sup>a</sup>Comparar  $|\partial v / \partial p_1|$  entre dos consumidores no es legítimo: la utilidad es ordinal y, por la identidad de Roy,  $\partial v / \partial p_1 = -x_1 \cdot \partial v / \partial w$ , donde  $\partial v / \partial w$  depende de la representación cardinal elegida. Una transformación  $\tilde{u} = 10u$  multiplica  $|\partial v / \partial p_1|$  por 10 sin cambiar las preferencias.

#### Ejercicio 4 – Heckman recupera la utilidad directa

**Datos:**  $e(p_1, p_2, \bar{u}) = \bar{u} p_1^{1/3} p_2^{2/3}$ .

(a) **Homogeneidad de grado 1 en  $p$  y crecimiento en  $\bar{u}$ .**

Evaluamos la función de gasto en precios escalados  $(tp_1, tp_2)$  con  $t > 0$ :

$$e(tp_1, tp_2, \bar{u}) = \bar{u} (tp_1)^{1/3} (tp_2)^{2/3} = \bar{u} t^{1/3} p_1^{1/3} t^{2/3} p_2^{2/3} = t^{1/3+2/3} \bar{u} p_1^{1/3} p_2^{2/3} = t \cdot e(p, \bar{u}). \quad (47)$$

Como  $e(tp, \bar{u}) = t \cdot e(p, \bar{u})$ , la función es homogénea de grado 1 en precios.

Para el crecimiento en  $\bar{u}$ , derivamos:

$$\frac{\partial e}{\partial \bar{u}} = p_1^{1/3} p_2^{2/3} > 0 \quad \text{para todo } p \gg 0. \quad (48)$$

Efectivamente,  $e$  es estrictamente creciente en  $\bar{u}$ .

(b) **Lema de Shephard.**

Derivamos  $e$  respecto a cada precio:

$$h_1 = \frac{\partial e}{\partial p_1} = \bar{u} \cdot \frac{1}{3} p_1^{-2/3} p_2^{2/3} = \frac{\bar{u}}{3} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{2/3}. \quad (49)$$

$$h_2 = \frac{\partial e}{\partial p_2} = \bar{u} \cdot \frac{2}{3} p_1^{1/3} p_2^{-1/3} = \frac{2\bar{u}}{3} \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{1/3}. \quad (50)$$

**(c) Utilidad indirecta e identidad de Roy.**

Invertimos  $e = w$  para obtener  $v(p, w)$ :

$$\bar{u} p_1^{1/3} p_2^{2/3} = w \implies v(p, w) = \frac{w}{p_1^{1/3} p_2^{2/3}}. \quad (51)$$

Para las marshallianas, sustituimos  $\bar{u} = v(p, w)$  en las hicksianas:

$$x_1 = h_1(p, v) = \frac{1}{3} \cdot \frac{w}{p_1^{1/3} p_2^{2/3}} \cdot p_1^{-2/3} p_2^{2/3} = \frac{w}{3} \cdot \frac{1}{p_1} = \frac{w}{3p_1}. \quad (52)$$

$$x_2 = h_2(p, v) = \frac{2}{3} \cdot \frac{w}{p_1^{1/3} p_2^{2/3}} \cdot p_1^{1/3} p_2^{-1/3} = \frac{2w}{3} \cdot \frac{1}{p_2} = \frac{2w}{3p_2}. \quad (53)$$

*Verificación alternativa con la identidad de Roy:*

$$\frac{\partial v}{\partial p_1} = -\frac{w}{3 p_1^{4/3} p_2^{2/3}}, \quad \frac{\partial v}{\partial w} = \frac{1}{p_1^{1/3} p_2^{2/3}}. \quad (54)$$

$$x_1 = -\frac{\partial v / \partial p_1}{\partial v / \partial w} = \frac{w}{3 p_1^{4/3} p_2^{2/3}} \cdot p_1^{1/3} p_2^{2/3} = \frac{w}{3p_1}. \quad (55)$$

**(d) Recuperación de la utilidad directa.**

De las marshallianas, despejamos los precios en función de las cantidades y el ingreso:

$$x_1 = \frac{w}{3p_1} \implies p_1 = \frac{w}{3x_1}, \quad x_2 = \frac{2w}{3p_2} \implies p_2 = \frac{2w}{3x_2}. \quad (56)$$

Sustituimos en la utilidad indirecta  $v = w/(p_1^{1/3} p_2^{2/3})$ :

$$\begin{aligned} v &= \frac{w}{\left(\frac{w}{3x_1}\right)^{1/3} \left(\frac{2w}{3x_2}\right)^{2/3}} \\ &= \frac{w}{\frac{w^{1/3}}{(3x_1)^{1/3}} \cdot \frac{(2w)^{2/3}}{(3x_2)^{2/3}}} \\ &= \frac{w \cdot (3x_1)^{1/3} \cdot (3x_2)^{2/3}}{w^{1/3} \cdot 2^{2/3} \cdot w^{2/3}} \\ &= \frac{(3x_1)^{1/3} (3x_2)^{2/3}}{2^{2/3}} = \frac{3 x_1^{1/3} x_2^{2/3}}{2^{2/3}}. \end{aligned} \quad (57)$$

El factor  $3/2^{2/3}$  es una constante positiva. Como la utilidad es ordinal, cualquier transformación monótona creciente representa las mismas preferencias.

(e) **Evaluación numérica.** Con  $p = (2, 1)$  y  $w = 16$ :

Utilidad indirecta:

$$v = \frac{16}{2^{1/3} \cdot 1^{2/3}} = \frac{16}{2^{1/3}} = \frac{16}{\sqrt[3]{2}} \approx 12.70. \quad (58)$$

Verificación de dualidad:

$$e(p, v) = v \cdot p_1^{1/3} p_2^{2/3} = \frac{16}{\sqrt[3]{2}} \cdot 2^{1/3} \cdot 1 = \frac{16 \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 16 = w. \quad (59)$$

La relación  $e(p, v(p, w)) = w$  se verifica.

### Ejercicio 5 (Retador) – Del Lema de Shephard a la integral

(a) **Aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo.**

Definimos la función  $f(p_1) = e(p_1, p_2, \bar{u})$ , que es diferenciable en  $p_1$  por hipótesis. El Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) establece que para toda función diferenciable:

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a). \quad (60)$$

Aplicando con  $a = p_1^0$ ,  $b = p_1^1$ , y  $f'(t) = \frac{\partial e}{\partial p_1}(t, p_2, \bar{u})$ :

$$e(p_1^1, p_2, \bar{u}) - e(p_1^0, p_2, \bar{u}) = \int_{p_1^0}^{p_1^1} \frac{\partial e}{\partial p_1}(t, p_2, \bar{u}) dt. \quad (61)$$

(b) **Reescritura con Shephard y conclusión sobre  $|VC|$ .**

El lema de Shephard nos dice que  $\frac{\partial e}{\partial p_1} = h_1$ . Sustituyendo en la integral:

$$e(p_1^1, p_2, \bar{u}) - e(p_1^0, p_2, \bar{u}) = \int_{p_1^0}^{p_1^1} h_1(t, p_2, \bar{u}) dt. \quad (62)$$

Ahora evaluamos en  $\bar{u} = V^0$  (utilidad inicial). Recordando que por dualidad  $e(p_1^0, p_2, V^0) = w$ :

$$e(p_1^1, p_2, V^0) - w = \int_{p_1^0}^{p_1^1} h_1(t, p_2, V^0) dt. \quad (63)$$

Dado que  $VC = w - e(p_1^1, V^0)$ , multiplicamos ambos lados por  $-1$ :

$$VC = - \int_{p_1^0}^{p_1^1} h_1(t, p_2, V^0) dt. \quad (64)$$

Análogamente, evaluando en  $\bar{u} = V^1$  y usando  $e(p_1^1, p_2, V^1) = w$ :

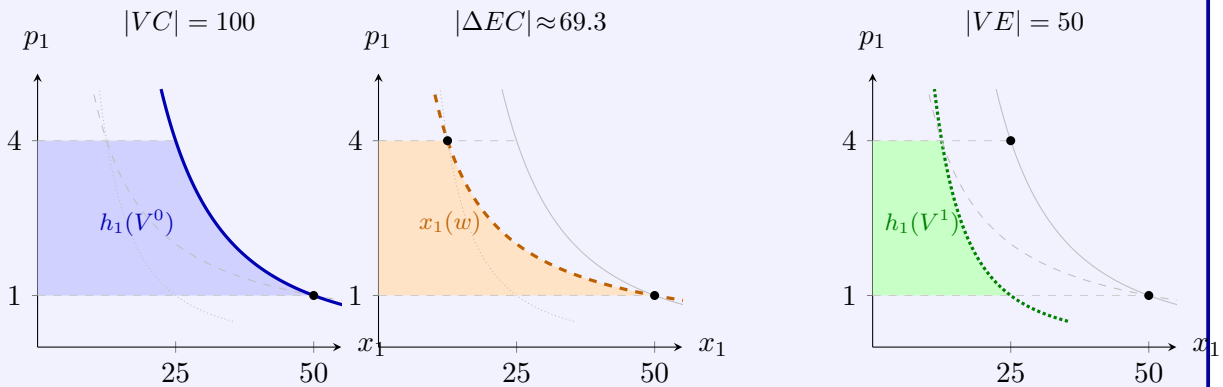
$$VE = - \int_{p_1^0}^{p_1^1} h_1(t, p_2, V^1) dt. \quad (65)$$

Y usando la demanda marshalliana:

$$\Delta EC = - \int_{p_1^0}^{p_1^1} x_1(t, p_2, w) dt. \quad (66)$$

**Interpretación geométrica.** Cuando  $p_1^1 > p_1^0$  (el precio sube), la integral  $\int_{p_1^0}^{p_1^1} h_1 dt$  es positiva porque  $h_1 > 0$ . Por lo tanto,  $VC < 0$  (pérdida de bienestar). El valor absoluto  $|VC|$  es exactamente **el área bajo la curva de demanda hicksiana**  $h_1(t, p_2, V^0)$  entre los precios  $p_1^0$  y  $p_1^1$ .

La siguiente figura ilustra las tres áreas para el caso Cobb-Douglas del ejercicio 2, con  $p_x : 1 \rightarrow 4$ . Mostramos las tres medidas en **paneles separados** para que cada área sea visible sin solapamientos. Las dos curvas hicksianas se cruzan respectivamente con la marshalliana en los puntos óptimos inicial  $(50, 1)$  y final  $(25, 4)$ .



En cada panel: la curva resaltada define el área sombreada; las otras dos aparecen en gris como referencia. Los puntos negros marcan los óptimos  $(50, 1)$  y  $(25, 4)$ .

**Lectura.** Las tres áreas son integrales del tipo  $\int_1^4 (\cdot) dp_1$  y, por tanto, regiones **a la izquierda** de cada curva entre las dos líneas horizontales  $p_1 = 1$  y  $p_1 = 4$ . Para un bien normal con precio en aumento se tiene el ordenamiento canónico:

$$|VE| \leq |\Delta EC| \leq |VC|, \quad 50 < 69.3 < 100.$$

- $|VC| = 100$ : cuánto habría que compensar al consumidor a *precios nuevos* para que mantenga  $V^0$ .

- $|VE| = 50$ : cuánto estaría dispuesto a pagar a *precios viejos* para evitar el cambio.
- $|\Delta EC| = 50 \ln 4 \approx 69.3$ : cambio en el excedente del consumidor marshalliano.

**(c) Aplicación numérica.**

Usamos los datos del ejercicio 2:  $u = x^{1/2}y^{1/2}$ ,  $p_y = 1$ ,  $V^0 = 50$ , cambio  $p_x : 1 \rightarrow 4$ .

La demanda hicksiana del bien  $x$  para la Cobb-Douglas simétrica con  $p_y = 1$  es:

$$h_1(t, 1, V^0) = V^0 \cdot \sqrt{\frac{p_y}{t}} = V^0 \cdot t^{-1/2} = 50 t^{-1/2}. \quad (67)$$

Calculamos la integral paso a paso:

$$\begin{aligned} \int_1^4 h_1 dt &= \int_1^4 50 t^{-1/2} dt \\ &= 50 \cdot \left[ \frac{t^{-1/2+1}}{-1/2+1} \right]_1^4 \\ &= 50 \cdot \left[ \frac{t^{1/2}}{1/2} \right]_1^4 \\ &= 50 \cdot 2 \cdot \left[ t^{1/2} \right]_1^4 \\ &= 100(\sqrt{4} - \sqrt{1}) \\ &= 100(2 - 1) = 100. \end{aligned} \quad (68)$$

Verificamos con la diferencia de gastos:

$$e(4, 1, V^0) - e(1, 1, V^0) = 2(50)\sqrt{4} - 2(50)\sqrt{1} = 200 - 100 = 100. \quad (69)$$

La integral y la diferencia de gastos coinciden, lo que confirma la relación derivada en (b).

Por lo tanto:

$$VC = - \int_1^4 h_1 dt = -100, \quad (70)$$

que es consistente con  $VC = 100(1 - \sqrt{4}) = 100(1 - 2) = -100$  del ejercicio 2 (con  $p = 4$ ).

## 2 Ejercicios para practicar

### Ejercicio 1 – El hogar de Deaton

**Datos:**  $u = (x_1 - 2)^{1/2}(x_2 - 1)^{1/2}$ ,  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 1$ ,  $p_1 = 3$ ,  $p_2 = 6$ ,  $w = 42$ .

#### (a) Ingreso discrecional.

El gasto de subsistencia es el costo de adquirir las cantidades mínimas  $(a_1, a_2)$ :

$$\text{gasto de subsistencia} = p_1 a_1 + p_2 a_2 = 3(2) + 6(1) = 6 + 6 = 12. \quad (71)$$

El ingreso discrecional es la porción del ingreso que queda después de cubrir la subsistencia:

$$\hat{w} = w - p_1 a_1 - p_2 a_2 = 42 - 12 = 30. \quad (72)$$

#### (b) Reducción a Cobb-Douglas.

Definimos las variables transformadas:

$$\hat{x}_1 = x_1 - a_1 = x_1 - 2 \geq 0, \quad \hat{x}_2 = x_2 - a_2 = x_2 - 1 \geq 0. \quad (73)$$

La utilidad en términos de las nuevas variables es:

$$u = \hat{x}_1^{1/2} \hat{x}_2^{1/2}, \quad (74)$$

que es exactamente una Cobb-Douglas simétrica ( $\alpha = 1/2$ ).

La restricción presupuestal se transforma substituyendo  $x_i = \hat{x}_i + a_i$ :

$$p_1(\hat{x}_1 + a_1) + p_2(\hat{x}_2 + a_2) = w \implies p_1 \hat{x}_1 + p_2 \hat{x}_2 = w - p_1 a_1 - p_2 a_2 = \hat{w} = 30. \quad (75)$$

Ahora resolvemos el problema CD con ingreso  $\hat{w}$ :

$$\hat{x}_1^* = \frac{\hat{w}}{2p_1} = \frac{30}{2(3)} = 5 \implies x_1^* = \hat{x}_1^* + a_1 = 5 + 2 = 7. \quad (76)$$

$$\hat{x}_2^* = \frac{\hat{w}}{2p_2} = \frac{30}{2(6)} = \frac{5}{2} \implies x_2^* = \hat{x}_2^* + a_2 = \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2}. \quad (77)$$

#### (c) Utilidad indirecta y función de gasto.

La utilidad indirecta (en variables transformadas, CD simétrica) es:

$$v = \sqrt{\hat{x}_1^* \hat{x}_2^*} = \sqrt{5 \cdot \frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}. \quad (78)$$

Para la función de gasto, el gasto discrecional de una CD simétrica es:

$$e_{CD}(\bar{u}) = 2\bar{u}\sqrt{p_1 p_2} = 2\bar{u}\sqrt{3 \cdot 6} = 2\bar{u}\sqrt{18} = 6\bar{u}\sqrt{2}. \quad (79)$$

El gasto total incluye el componente de subsistencia:

$$e(p, \bar{u}) = p_1 a_1 + p_2 a_2 + e_{CD}(\bar{u}) = 12 + 6\bar{u}\sqrt{2}. \quad (80)$$

**(d) Verificación de dualidad.**

$$e(p, v) = 12 + 6 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 12 + 6 \cdot \frac{5 \cdot 2}{2} = 12 + 6 \cdot 5 = 12 + 30 = 42 = w. \quad (81)$$

La relación  $e(p, v(p, w)) = w$  se verifica.

## Ejercicio 2 – Tirole y el precio del café

**Datos:**  $u = 2x_1 + 3x_2$ ,  $w = 90$ ,  $p_2 = 1$ ,  $p_1 : 3 \rightarrow 2$ .

**(a) Cestas óptimas.**

Con utilidad lineal (sustitutos perfectos), el consumidor compara la utilidad marginal por sol gastado en cada bien:

$$\frac{UMg_1}{p_1} = \frac{2}{p_1} \quad \text{vs} \quad \frac{UMg_2}{p_2} = \frac{3}{1} = 3. \quad (82)$$

La regla de decisión: si  $2/p_1 > 3$  (i.e.  $p_1 < 2/3$ ), solución de esquina en bien 1; si  $2/p_1 < 3$  (i.e.  $p_1 > 2/3$ ), solución de esquina en bien 2.

*Antes del cambio* ( $p_1 = 3$ ):  $2/3 \approx 0.67 < 3$ . El bien 2 rinde más utilidad por sol. Solución de esquina en  $x_1 = 0$ :

$$x_1^0 = 0, \quad x_2^0 = \frac{w}{p_2} = \frac{90}{1} = 90, \quad V^0 = 2(0) + 3(90) = 270. \quad (83)$$

*Después del cambio* ( $p_1 = 2$ ):  $2/2 = 1 < 3$ . El bien 2 **sigue** rindiendo más. Misma solución de esquina:

$$x_1^1 = 0, \quad x_2^1 = 90, \quad V^1 = 270. \quad (84)$$

**(b) Variación Compensada.**

Para el EMP con  $u = 2x_1 + 3x_2$ , el consumidor minimiza el costo de alcanzar  $\bar{u}$  unidades de utilidad. Compara el costo por unidad de utilidad de cada bien:  $p_1/2$  (vía bien 1) vs.  $p_2/3$  (vía bien 2).

Con  $p_2 = 1$ , el costo vía bien 2 es  $1/3$ .

A  $p_1^1 = 2$ :  $p_1/2 = 1 > 1/3$ . Más barato usar bien 2. Entonces:  $h_1 = 0$ ,  $h_2 = \bar{u}/3$ ,  $e = \bar{u}/3$ .

$$e(p^1, V^0) = \frac{V^0}{3} = \frac{270}{3} = 90 = w. \quad (85)$$

$$VC = w - e(p^1, V^0) = 90 - 90 = 0. \quad (86)$$

**(c) Variación Equivalente.**

A  $p_1^0 = 3$ :  $p_1/2 = 3/2 > 1/3$ . Sigue siendo más barato usar bien 2:  $e = \bar{u}/3$ .

$$e(p^0, V^1) = \frac{V^1}{3} = \frac{270}{3} = 90 = w. \quad (87)$$

$$VE = e(p^0, V^1) - w = 90 - 90 = 0. \quad (88)$$

**(d) Comparación e interpretación.**

$|VC| = |VE| = 0$ . El cambio de precio del café **no afecta en absoluto al consumidor**, porque nunca compra café en ninguno de los dos escenarios de precios. En ambos casos, “todo lo demás” ( $x_2$ ) rinde más utilidad por sol gastado, de modo que el consumidor destina todo su ingreso a  $x_2$ . La variación de  $p_1$  es completamente irrelevante para su bienestar.

*Lección:* con sustitutos perfectos, las medidas de bienestar pueden ser nulas si el precio cambia en un bien que el consumidor no consume en ninguno de los dos escenarios. Esto contrasta con Cobb-Douglas, donde el consumidor siempre gasta una fracción positiva de su ingreso en ambos bienes y todo cambio de precios lo afecta.

**Ejercicio 3 – Shephard para la Leontief**

**Datos:**  $u = \min\{x_1, 3x_2\}$ ,  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 9$ .

**(a) Función de gasto vía EMP.**

Las isocuantas de  $\min\{x_1, 3x_2\} = \bar{u}$  tienen forma de L con vértice en el punto donde ambos argumentos son iguales:

$$x_1 = 3x_2 = \bar{u} \implies x_1 = \bar{u}, \quad x_2 = \frac{\bar{u}}{3}. \quad (89)$$

*Argumento geométrico:* cualquier punto sobre la isocuanta distinto del vértice usa más de uno de los bienes sin incrementar la utilidad (uno de los argumentos excede al otro sin beneficio). Como los precios son estrictamente positivos, el gasto es estrictamente mayor fuera del vértice. Por lo tanto, la solución del EMP es siempre el vértice.

La función de gasto es:

$$e = p_1 \cdot \bar{u} + p_2 \cdot \frac{\bar{u}}{3} = \bar{u} \left( p_1 + \frac{p_2}{3} \right). \quad (90)$$

Numéricamente:

$$e = \bar{u} \left( 2 + \frac{9}{3} \right) = \bar{u}(2 + 3) = 5\bar{u}. \quad (91)$$

**(b) Lema de Shephard.**

Derivamos  $e$  respecto a cada precio:

$$h_1 = \frac{\partial e}{\partial p_1} = \bar{u}. \quad (92)$$

$$h_2 = \frac{\partial e}{\partial p_2} = \frac{\bar{u}}{3}. \quad (93)$$

Las demandas hicksianas son **constantes en precios**: no dependen de  $p_1$  ni  $p_2$ , solo de  $\bar{u}$ . Esto refleja que la función de gasto es **lineal** en cada precio (no hay curvatura), lo cual a su vez es consecuencia de que con complementos perfectos **no existe posibilidad de sustitución** entre bienes. El consumidor siempre compra exactamente en la proporción  $x_1 : x_2 = 3 : 1$ , sin importar los precios.

**(c) Evaluación en  $\bar{u} = 6$ .**

Función de gasto:

$$e = 5(6) = 30. \quad (94)$$

Hicksianas:

$$h_1 = 6, \quad h_2 = \frac{6}{3} = 2. \quad (95)$$

Ahora verificamos con el UMP usando  $w = e(p, 6) = 30$ . La condición de vértice es  $x_1 = 3x_2$ . Sustituyendo en la RP:

$$p_1(3x_2) + p_2 x_2 = (3p_1 + p_2) x_2 = w. \quad (96)$$

$$x_2 = \frac{w}{3p_1 + p_2} = \frac{30}{3(2) + 9} = \frac{30}{15} = 2. \quad (97)$$

$$x_1 = 3x_2 = 6. \quad (98)$$

En efecto:  $x_1 = 6 = h_1$  y  $x_2 = 2 = h_2$ . La dualidad entre marshallianas y hicksianas se verifica.

**(d) Efecto sustitución.**

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_1} = \frac{\partial}{\partial p_1}(\bar{u}) = 0. \quad (99)$$

El efecto sustitución es **nulo**. Con complementos perfectos, los bienes se consumen *siempre* en la proporción fija  $x_1 : x_2 = 3 : 1$ . No existe posibilidad de sustituir un bien por otro ante cambios en precios relativos. Toda la respuesta de la demanda ante un cambio de precio proviene *exclusivamente* del efecto ingreso.

Podemos verificar esto con la ecuación de Slutsky. La marshalliana general es  $x_1 = 3w/(3p_1 + p_2)$ , de modo que:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = -\frac{9w}{(3p_1 + p_2)^2}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial w} = \frac{3}{3p_1 + p_2}. \quad (100)$$

Slutsky:  $\frac{\partial h_1}{\partial p_1} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + x_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial w}$ :

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_1} = -\frac{9w}{(3p_1 + p_2)^2} + \frac{3w}{3p_1 + p_2} \cdot \frac{3}{3p_1 + p_2} = -\frac{9w}{(3p_1 + p_2)^2} + \frac{9w}{(3p_1 + p_2)^2} = 0. \quad (101)$$

El resultado es consistente: efecto sustitución nulo, efecto total = efecto ingreso.

#### Ejercicio 4 – Saez descompone con Slutsky

**Datos:**  $u = x_1 x_2^2$ ,  $p = (1, 2)$ ,  $w = 30$ .

(a) **UMP.**

Observamos que  $u = x_1 x_2^2$  es una transformación monótona creciente de:

$$\tilde{u} = (x_1 x_2^2)^{1/3} = x_1^{1/3} x_2^{2/3}, \quad (102)$$

que es una Cobb-Douglas con  $\alpha = 1/3$  y  $\beta = 2/3$ . Como las transformaciones monótonas preservan las preferencias, las demandas son las mismas.

Aplicamos las fórmulas CD:

$$x_1^* = \frac{\alpha w}{p_1} = \frac{(1/3)(30)}{1} = 10. \quad (103)$$

$$x_2^* = \frac{\beta w}{p_2} = \frac{(2/3)(30)}{2} = 10. \quad (104)$$

La utilidad (en la escala original  $u = x_1 x_2^2$ ) es:

$$v = x_1^* \cdot (x_2^*)^2 = 10 \cdot 100 = 1,000. \quad (105)$$

(b) **Función de gasto y verificación con Shephard.**

Trabajamos con  $\tilde{u} = u^{1/3} = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$  (en la cesta óptima,  $\tilde{v} = 10$ ). La función de gasto de una CD general es:

$$e = \frac{\tilde{u}}{\alpha^\alpha \beta^\beta} p_1^\alpha p_2^\beta. \quad (106)$$

El denominador es:

$$\alpha^\alpha \beta^\beta = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/3} \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} = \frac{1}{3^{1/3}} \cdot \frac{2^{2/3}}{3^{2/3}} = \frac{2^{2/3}}{3}. \quad (107)$$

Por lo tanto:

$$e = \frac{3\tilde{u}}{2^{2/3}} p_1^{1/3} p_2^{2/3}. \quad (108)$$

Verificamos:  $e(1, 2, 10) = \frac{30}{2^{2/3}} \cdot 1 \cdot 2^{2/3} = 30 = w$ .

Aplicamos Shephard:

$$h_1 = \frac{\partial e}{\partial p_1} = \frac{3\tilde{u}}{2^{2/3}} \cdot \frac{1}{3} p_1^{-2/3} p_2^{2/3} = \frac{\tilde{u}}{2^{2/3}} p_1^{-2/3} p_2^{2/3}. \quad (109)$$

Evaluamos en  $(p_1, p_2, \tilde{u}) = (1, 2, 10)$ :

$$h_1 = \frac{10}{2^{2/3}} \cdot 1 \cdot 2^{2/3} = 10 = x_1^*. \quad (110)$$

La hicksiana evaluada en el nivel de utilidad óptimo coincide con la marshalliana, tal como predice la dualidad.

### (c) Descomposición de Slutsky.

El precio  $p_1$  sube de 1 a 1.50.

*Cambio total en  $x_1$ :*

$$x_1(1.50, 2, 30) = \frac{\alpha w}{p_1'} = \frac{(1/3)(30)}{1.50} = \frac{10}{1.50} = \frac{20}{3} \approx 6.67. \quad (111)$$

$$\Delta x_1 = \frac{20}{3} - 10 = -\frac{10}{3} \approx -3.33. \quad (112)$$

*Derivadas parciales evaluadas en el punto inicial ( $p_1 = 1$ ):*

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = -\frac{\alpha w}{p_1^2} = -\frac{(1/3)(30)}{1^2} = -10. \quad (113)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial w} = \frac{\alpha}{p_1} = \frac{1/3}{1} = \frac{1}{3}. \quad (114)$$

*Efecto sustitución* (componente de Slutsky  $ES = \partial h_1 / \partial p_1 = \partial x_1 / \partial p_1 + x_1 \cdot \partial x_1 / \partial w$ ):

$$ES = -10 + 10 \cdot \frac{1}{3} = -10 + \frac{10}{3} = \frac{-30 + 10}{3} = -\frac{20}{3} \approx -6.67. \quad (115)$$

*Efecto ingreso* ( $EI = -x_1 \cdot \partial x_1 / \partial w$ ):

$$EI = -10 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{10}{3} \approx -3.33. \quad (116)$$

*Verificación:* la ecuación de Slutsky requiere  $ES + EI = \partial x_1 / \partial p_1$ :

$$ES + EI = -\frac{20}{3} - \frac{10}{3} = -\frac{30}{3} = -10 = \frac{\partial x_1}{\partial p_1}. \quad (117)$$

La descomposición es consistente.

*Aproximación discreta* (multiplicando cada efecto marginal por  $\Delta p_1 = 0.5$ ):

$$\Delta x_1^{ES} \approx ES \cdot \Delta p_1 = -\frac{20}{3}(0.5) = -\frac{10}{3} \approx -3.33. \quad (118)$$

$$\Delta x_1^{EI} \approx EI \cdot \Delta p_1 = -\frac{10}{3}(0.5) = -\frac{5}{3} \approx -1.67. \quad (119)$$

$$\text{Total} \approx -3.33 - 1.67 = -5.00. \quad (120)$$

(El valor exacto del cambio total discreto es  $-10/3 \approx -3.33$ ; la diferencia se debe a que la aproximación lineal no captura la curvatura de la función de demanda.)

**(d) Participaciones en el gasto.**

$$s_1 = \frac{p_1 x_1}{w} = \frac{1 \cdot 10}{30} = \frac{1}{3}. \quad (121)$$

$$s_2 = \frac{p_2 x_2}{w} = \frac{2 \cdot 10}{30} = \frac{2}{3}. \quad (122)$$

Las participaciones suman 1 (como debe ser:  $s_1 + s_2 = 1/3 + 2/3 = 1$ ) y coinciden exactamente con los exponentes de la Cobb-Douglas ( $\alpha = 1/3$ ,  $\beta = 2/3$ ). Esta es una propiedad característica de las preferencias Cobb-Douglas: cada bien absorbe una fracción **constante** del ingreso igual a su exponente, independientemente de los precios. Es decir, no importa cómo cambien  $p_1$  y  $p_2$ , Saez siempre destinará exactamente  $1/3$  de su ingreso al bien 1 y  $2/3$  al bien 2.