Problemas Adicionales

Microeconomía I · 2026-1

Problemas Opcionales. Los siguientes ejercicios son opcionales. Son útiles para profundizar en los temas de la práctica pero no son obligatorios.

Sección 1. Relaciones de preferencia

Problema 1. Transformaciones monótonas no estrictas

¿Qué ocurre si f es creciente pero *no estrictamente*? Es decir, si $f(a) \leq f(b)$ cuando $a \leq b$, pero puede ocurrir $f(a) = f(b)$ con $a \neq b$. ¿Se preserva la representación de utilidad? Dé un contraejemplo o demuestre.

(Este problema complementa el ejercicio sobre transformaciones monótonas de la sección de preferencias.)

Solución.

No se preserva la representación.

Contraejemplo. Sea $X = \{a, b\}$ con $a \succ b$, representada por $u(a) = 1$ y $u(b) = 0$. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(t) = 0$ para todo t (función constante). Entonces f es no decreciente pero no estrictamente creciente, y $(f \circ u)(a) = 0 = (f \circ u)(b)$. La composición no distingue a de b, violando $a \succ b \Rightarrow (f \circ u)(a) > (f \circ u)(b)$.

Discusión. Si f toma el mismo valor en $u(a)$ y $u(b)$ con $u(a) \neq u(b)$, la transformación colapsa alternativas distinguibles y destruye la representación ordinal. La monotonicidad *estricta* de f es la condición mínima necesaria para preservarla.

Problema 2. Preferencia lexicográfica sin representación

Argumente por qué la preferencia lexicográfica definida sobre $\mathbb{R}^2$ **no** admite una representación de utilidad.

Pista: cada curva de indiferencia es un único punto. ¿Cuántos puntos hay en $\mathbb{R}^2$? ¿Cuántos números reales distintos se necesitarían? Considere también qué implica la separabilidad de $\mathbb{R}$.

Solución.

Paso 1 (indiferencia = singletons). Para la preferencia lexicográfica sobre $\mathbb{R}^2$, la clase de indiferencia de (x_1, x_2) es el singleton $\{(x_1, x_2)\}$: si $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ fueran distintos, habría preferencia estricta por la primera o segunda coordenada. Luego toda función representante u debe satisfacer $u(x_1, x_2) \neq u(y_1, y_2)$ para todo par distinto.

Paso 2 (intervalos disjuntos). Para cada $x_1 \in \mathbb{R}$ fijo, u es estrictamente creciente en x_2, así que $I_{x_1} := \{u(x_1, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$ es un intervalo no degenerado. Para $x_1 \neq x_1'$, todo punto con primera coordenada mayor domina estrictamente al otro, luego $I_{x_1} \cap I_{x_1'} = \varnothing$. Así $\{I_{x_1}\}_{x_1 \in \mathbb{R}}$ es una colección *no numerable* de intervalos disjuntos en $\mathbb{R}$.

Paso 3 (contradicción). Todo intervalo no degenerado contiene al menos un racional. Asignando $q_{x_1} \in I_{x_1}$ a cada x_1 se obtiene una inyección de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{Q}$. Imposible, pues $\mathbb{R}$ es no numerable y $\mathbb{Q}$ es numerable. $\square$

Problema 3. Relaciones asimétricas y negativamente transitivas

Sea $\succ$ una relación binaria en un conjunto X que es **asimétrica** y **negativamente transitiva** (si $\neg(x \succ y)$ y $\neg(y \succ z)$, entonces $\neg(x \succ z)$). Decimos que $\succ$ es una relación de preferencia estricta.

(a) Demuestre que $\succ$ es irreflexiva, transitiva y acíclica.

(b) Defina $\succeq := \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \notin \succ\}$. Demuestre que $\succeq$ es completa y transitiva.

Solución.

(a)

Irreflexividad. Si $x \succ x$, la asimetría exige $\neg(x \succ x)$: contradicción directa.

Transitividad. Sean $x \succ y$ e $y \succ z$. Por asimetría, $\neg(y \succ x)$. Suponga $\neg(x \succ z)$. Aplicando transitividad negativa a $\neg(y \succ x)$ y $\neg(x \succ z)$ se obtiene $\neg(y \succ z)$, contradiciendo $y \succ z$. Luego $x \succ z$.

Aciclicidad. Si $x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_k$, la transitividad implica $x_1 \succ x_k$; la asimetría garantiza $\neg(x_k \succ x_1)$, por lo que no hay ciclos.

(b)

Completitud. Para cualesquiera x, y: si $\neg(x \succeq y)$, entonces $y \succ x$; por asimetría $\neg(x \succ y)$, luego $y \succeq x$. Siempre se cumple al menos una de las dos.

Transitividad. Sean $x \succeq y$ e $y \succeq z$, es decir $\neg(y \succ x)$ y $\neg(z \succ y)$. Por transitividad negativa, $\neg(z \succ x)$, que es exactamente $x \succeq z$. $\square$

Problema 4. La relación «es divisible por»

Considere la relación binaria «es divisible por» en $\mathbb{N}$, es decir, $x \succeq y$ si $y \mid x$ (i.e. $x/y \in \mathbb{N}$). ¿Es completa? ¿Es transitiva? ¿Es reflexiva? Justifique cada respuesta.

Solución.

- **Reflexiva:** $x/x = 1 \in \mathbb{N}$, luego $x \mid x$ y $x \succeq x$. ✓
- **Transitiva:** Si $y \mid x$ y $z \mid y$, entonces $x = ky$ e $y = mz$ con $k, m \in \mathbb{N}$, de donde $x = kmz$ y $z \mid x$. ✓
- **No completa:** Contraejemplo: $x = 2$, $y = 3$. Como $3/2 \notin \mathbb{N}$ y $2/3 \notin \mathbb{N}$, no se tiene $2 \succeq 3$ ni $3 \succeq 2$. $\times$

Problema 5. Diferencias apenas perceptibles [Retador]

Sea $X = \mathbb{R}_+$ y defina $x \succ y$ si y solo si $x - y \geq \delta$ para algún $\delta > 0$ fijo. Demuestre que se puede asociar a $\succ$ una relación $\succeq$ que sea completa o transitiva, pero no ambas a la vez.

Solución.

Siguiendo el procedimiento estándar, definimos $x \succeq y \iff \neg(y \succ x) \iff y - x < \delta$.

$\succeq$ **es completa.** Para cualesquiera x, y: si $y - x \geq \delta$ entonces $y \succ x$ y $x - y < 0 < \delta$, luego $y \succeq x$; si $y - x < \delta$ entonces $x \succeq y$. Siempre se cumple al menos una. ✓

$\succeq$ **no es transitiva.** Tome $\varepsilon = \delta/2$. Entonces $0 \succeq \varepsilon$ y $\varepsilon \succeq \delta$ (pues $\varepsilon < \delta$). Sin embargo $\delta - 0 = \delta \not< \delta$, por lo que $\neg(0 \succeq \delta)$. $\times$

Nótese que $\succ$ sí es transitiva (si $x - y \geq \delta$ e $y - z \geq \delta$, entonces $x - z \geq 2\delta \geq \delta$) pero no completa cuando $|x - y| < \delta$. Así, ninguna extensión $\succeq$ puede ser simultáneamente completa y transitiva. $\square$

Problema 6. Representación contando alternativas dominadas [Retador]

Sea X un conjunto finito y $\succeq$ una relación de preferencia racional sobre X. Defina

$$u(x) \;=\; \bigl|\{z \in X : x \succeq z\}\bigr|.$$

Demuestre que u representa a $\succeq$, es decir, que $x \succeq y \iff u(x) \geq u(y)$.

Solución.

Sea $\succeq$ racional (completa y transitiva) sobre X finito.

($\Rightarrow$) $x \succeq y \implies u(x) \geq u(y)$. Sea $A = \{z \in X : y \succeq z\}$. Para todo $z \in A$, como $x \succeq y$ y $y \succeq z$, la transitividad da $x \succeq z$. Luego $A \subseteq \{z : x \succeq z\}$ y $u(x) \geq |A| = u(y)$.

($\Leftarrow$) $u(x) \geq u(y) \implies x \succeq y$. Suponga $\neg(x \succeq y)$. Por completitud, $y \succ x$. Para todo z con $x \succeq z$, la transitividad da $y \succeq z$, luego $\{z : x \succeq z\} \subseteq \{z : y \succeq z\}$. Además, $y \in \{z : y \succeq z\}$ pero $y \notin \{z : x \succeq z\}$, así que la inclusión es estricta: $u(x) < u(y)$. Contradicción. $\square$

Problema 7. Inconmensurabilidad

Suponga que huye de un barco que se hunde y debe elegir entre: *(a)* un ejemplar raro autografiado de *Why Nations Fail*, o *(b)* su disco duro con todas las fotos de su vida en pareja. La mayoría de personas reporta que ninguna de las relaciones estándar —preferencia estricta o indiferencia— describe bien la situación.

Considere las relaciones $\succeq$ (al menos tan bueno como), $\succ$ (mejor que), $\sim$ (indiferente) y $\triangle$ (inconmensurable). Explique cómo espera que se relacionen entre sí y qué propiedades de completitud o transitividad espera que tengan. ¿Admite este esquema una representación de utilidad?

Solución.

La distinción clave es que $A \sim B$ e $A \triangle B$ son fenomenológicamente distintos:

- Si $A \sim B$ (indiferencia genuina), agregar un dólar a A debería producir $A' \succ B$.
- Si $A \triangle B$ (inconmensurabilidad), la mejora marginal $A' \triangle B$ persiste: el «empate» no se rompe con perturbaciones pequeñas (Chang, 1997).

Estructura. Las cuatro relaciones $\succ$, $\prec$, $\sim$, $\triangle$ son mutuamente excluyentes y, si se incluye $\triangle$, exhaustivas. La completitud de $\succeq$ falla precisamente cuando $\triangle \neq \varnothing$, pues «$x \triangle y$» significa que ni $x \succeq y$ ni $y \succeq x$.

Transitividad. Pueden ocurrir violaciones entre categorías; por ejemplo, $x \sim y$ e $y \triangle z$ no imponen restricción lógica sobre (x, z).

Representabilidad. El teorema de Debreu requiere completitud. En presencia de inconmensurabilidades, no existe $u : X \to \mathbb{R}$ representante: no hay forma de asignar números reales a x e y sin imponer algún orden entre ellos.

Problema 8. Utilidad marginal decreciente y transformaciones [Retador]

La afirmación de que una función de utilidad es estrictamente creciente es una afirmación sobre primeras derivadas. Defina formalmente la *utilidad marginal decreciente* (UMD), que es una afirmación sobre segundas derivadas. Determine si la UMD se preserva bajo transformaciones estrictamente crecientes. A la luz de su respuesta, explique por qué los textos introductorios se refieren a una «ley» de la utilidad marginal decreciente.

Solución.

Definición. Sea $u : X \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable. Decimos que u exhibe *utilidad marginal decreciente* (UMD) si $u''(x) < 0$ para todo $x \in X$.

La UMD no se preserva. Sea $g = f \circ u$ con f estrictamente creciente y diferenciable:

$$g'(x) = f'(u(x))\, u'(x) > 0, \qquad g''(x) = f''(u(x))\, [u'(x)]^2 + f'(u(x))\, u''(x).$$

Si f es convexa ($f'' > 0$), el primer término puede dominar y producir $g'' > 0$.

Contraejemplo. Tome $u(x) = \ln x$ (con $u''(x) = -1/x^2 < 0$) y $f(t) = e^{3t}$ (convexa). Entonces $g(x) = x^3$, para la cual $g''(x) = 6x > 0$. La UMD de u no se traslada a g.

Consecuencia. La UMD es una propiedad *cardinal*: depende de la representación elegida, no del orden subyacente. Por eso no puede ser una «ley» en sentido ordinal. Los textos la presentan así porque, fijada una escala de utilidad, captura intuitivamente la saciedad relativa; pero formalmente solo tiene sentido dado un cardinal fijo.

Sección 2. Estructuras de elección

Una *estructura de elección* es un par $(\mathcal{B}, C)$ donde $\mathcal{B}$ es una familia de subconjuntos no vacíos de X y $C : \mathcal{B} \to 2^X$ satisface $\varnothing \neq C(B) \subseteq B$ para todo $B \in \mathcal{B}$. La función C describe el comportamiento observable del agente: dados los conjuntos de opciones disponibles, ¿qué elige?

Definición (WARP). Una estructura de elección $(\mathcal{B}, C)$ satisface el *Axioma Débil de la Preferencia Revelada* (WARP) si: siempre que existan $B, B' \in \mathcal{B}$ con $x, y \in B \cap B'$, $x \in C(B)$ e $y \in C(B')$, entonces $x \in C(B')$.

Intuitivamente: si x fue elegido en una situación donde y estaba disponible, entonces y no puede ser elegido «sin que x también lo sea» en otro problema donde ambos estén presentes.

Problema 9. WARP y conjuntos de elección posibles

Sea $X = \{x, y, z\}$ y $\mathcal{B} = \big\{\{x, y\}, \{x, y, z\}\big\}$ con $C(\{x, y\}) = \{x\}$. Demuestre que si WARP se cumple, entonces

$$C\big(\{x, y, z\}\big) \in \big\{\{x\},\ \{z\},\ \{x, z\}\big\}.$$

En particular, demuestre que $C(\{x, y, z\}) = \{y\}$, $\{x, y\}$ o $\{x, y, z\}$ violan WARP.

Solución.

Sea $B = \{x, y\}$ y $B' = \{x, y, z\}$. Verificamos los subconjuntos no vacíos de B':

Caso $C(B') = \{y\}$. Tenemos $x, y \in B \cap B'$, $x \in C(B)$ e $y \in C(B')$. WARP exige $x \in C(B') = \{y\}$. Imposible. $\times$

Caso $C(B') = \{x, y\}$. Tenemos $y \in C(B')$ y $x \in C(B)$ con $x, y \in B \cap B'$. WARP exige

$y \in C(B) = \{x\}$. Imposible. $\times$

Caso $C(B') = \{x, y, z\}$. Ídem anterior: $y \in C(B')$, WARP exige $y \in C(B) = \{x\}$. Imposible. $\times$

Los tres casos restantes son compatibles:

- $C(B') = \{x\}$: no hay $y \in C(B')$, WARP no se activa. ✓
- $C(B') = \{z\}$: ningún elemento de $B \cap B' = \{x, y\}$ está en $C(B')$; WARP no se activa. ✓
- $C(B') = \{x, z\}$: $x \in C(B)$ y $x \in C(B')$; no hay $y \in C(B')$, no hay violación. ✓ □

Problema 10. Racionalizable implica WARP

Demuestre que toda estructura de elección racionalizable satisface WARP. Una estructura es *racionalizable* si existe una relación de preferencias $\succeq$ tal que

$$C(B) = \{x \in B : x \succeq y \text{ para todo } y \in B\} \quad \forall\, B \in \mathcal{B}.$$

Solución.

Sea $(\mathcal{B}, C)$ racionalizada por $\succeq$. Supongamos $x, y \in B \cap B'$, $x \in C(B)$ e $y \in C(B')$. Queremos $x \in C(B')$.

$x \in C(B)$ significa $x \succeq z$ para todo $z \in B$. Como $y \in B \cap B' \subseteq B$, tenemos $x \succeq y$.

$y \in C(B')$ significa $y \succeq z$ para todo $z \in B'$.

Sea $z \in B'$ arbitrario. Entonces $y \succeq z$; junto con $x \succeq y$, la transitividad da $x \succeq z$. Como z es arbitrario, $x \in C(B')$. □

Problema 11. Propiedades α, β y WARP

Sea X finito y C una función de elección. Considere:

- *Propiedad* α: si $x \in B \subseteq A$ y $x \in C(A)$, entonces $x \in C(B)$.
- *Propiedad* β: si $x, y \in C(B)$, $B \subseteq A$ y $x \in C(A)$, entonces $y \in C(A)$.

Demuestre que α y β juntas implican WARP, y que WARP junto con no vacuidad implica α y β.

Solución.

$\alpha + \beta \Rightarrow$ **WARP.** Sean $x, y \in B \cap B'$, $x \in C(B)$ e $y \in C(B')$.

Paso 1. Por α sobre B: $x \in B \cap B' \subseteq B$ y $x \in C(B)$, luego $x \in C(B \cap B')$.

Paso 2. Por α sobre B': $y \in B \cap B' \subseteq B'$ y $y \in C(B')$, luego $y \in C(B \cap B')$.

Paso 3. $x, y \in C(B \cap B')$, $B \cap B' \subseteq B'$, $y \in C(B')$. Por β: $x \in C(B')$. ✓

WARP $\Rightarrow \alpha$. Sea $x \in B \subseteq A$, $x \in C(A)$. Suponga $\neg(x \in C(B))$. Sea $y \in C(B)$. Como $x, y \in B \subseteq A$ y $x \in C(A)$, WARP implica $x \in C(B)$: contradicción. ✓

WARP $\Rightarrow \beta$. Sean $x, y \in C(B)$, $B \subseteq A$, $x \in C(A)$. Suponga $\neg(y \in C(A))$. Como $y \in C(B)$ y $x \in C(A)$, WARP implica $y \in C(A)$: contradicción. □

Problema 12. Relación de Pareto

Considere n agentes, cada uno con una relación de preferencia $\succsim_i$ racional sobre un conjunto finito X. Defina la *relación de Pareto*: $x\,P\,y$ si y solo si $x \succsim_i y$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

(a) Demuestre que P es transitiva.

(b) Demuestre que P es completa si y solo si $\succsim_i = P$ para todo i.

Solución.

(a) Transitividad. Si $x\,P\,y$ e $y\,P\,z$, entonces $x \succsim_i y$ e $y \succsim_i z$ para todo i. Por la transitividad de cada $\succsim_i$, $x \succsim_i z$ para todo i, luego $x\,P\,z$. ✓

(b)

($\Leftarrow$) Si $\succsim_i = P$ para todo i, P se reduce a una sola relación racional, que es completa. ✓

($\Rightarrow$) Suponga P completa pero $\succsim_j \neq \succsim_k$ para algún par. Existen x, y con $x \succsim_j y$ y $\neg(x \succsim_k y)$, es decir $y \succ_k x$. Por completitud de P: $x\,P\,y$ o $y\,P\,x$.

- Si $x\,P\,y$: entonces $x \succsim_k y$. Contradicción.
- Si $y\,P\,x$: entonces $y \succsim_j x$ y junto con $x \succsim_j y$ obtenemos $x \sim_j y$. Pero $\neg(x\,P\,y)$ implica $\exists\, i$ con $\neg(x \succsim_i y)$. Razonando para todo par, la completitud de P obliga a que todos los órdenes estrictos inducidos coincidan: $\succsim_i = P$ para todo i.

□

Sección 3. Restricción presupuestaria

Problema 13. Convexidad y compacidad del conjunto presupuestario

Demuestre que la restricción presupuestaria

$$B(p, w) = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : p \cdot x \leq w\}$$

es un conjunto convexo y compacto (para $p \gg 0$ y $w > 0$).

Solución.

Sea $p \gg 0$ y $w > 0$.

Convexidad. Sean $x, y \in B(p,w)$ y $\lambda \in [0,1]$. Sea $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. Entonces $z \geq 0$ y

$$p \cdot z \;=\; \lambda(p \cdot x) + (1-\lambda)(p \cdot y) \;\leq\; \lambda w + (1-\lambda)w \;=\; w,$$

luego $z \in B(p,w)$. ✓

Cerrado. Sea $(x^k) \subseteq B(p,w)$ con $x^k \to x^*$. Por continuidad de $x \mapsto p \cdot x$: $p \cdot x^* \leq w$. Además $x^k \geq 0$ implica $x^* \geq 0$. Luego $x^* \in B(p,w)$. ✓

Acotado. Para cada coordenada i:

$$p_i\, x_i \;\leq\; p \cdot x \;\leq\; w \quad\Longrightarrow\quad x_i \;\leq\; \frac{w}{p_i} < \infty.$$

Luego $B(p,w) \subseteq \prod_{i=1}^{n}[0, w/p_i]$, acotado. ✓

Por el teorema de Heine–Borel, cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$ implica compacto. $\square$