Facultad de Ciencias Sociales
Especialidad de Economía
Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)
Ciclo 2026-1

Microeconomía 1
Práctica Dirigida 7

Tecnología, función de producción y la empresa competitiva

Profesor: José Gallardo Ku (j.gallardo@pucp.edu.pe)

Jefes de práctica: Marcelo Gallardo (marcelo.gallardo@pucp.edu.pe)
Raúl Amao (raul.amao@pucp.edu.pe)

Ejercicios para la sesión de prácticas

1. **Isocuantas y rendimientos a escala.** Para cada una de las siguientes funciones de producción, grafique las isocuantas, describa la relación entre los factores de producción e indique qué tipo de rendimientos a escala presenta.

   (a) $f(K, L) = \left[\min\{K, L\}\right]^{1/3}$.

   (b) $f(K, L) = K^3 L$.

   (c) $f(K, L) = \min\{L + K,\ K + 4\}$.

2. **Productividades marginal y media.** La tecnología disponible permite producir un bien empleando dos factores según

$$q = f(\ell, k) = (\ell k)^{\alpha} + \ell^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

   (a) Halle las productividades marginales de cada factor y demuestre que ambas son siempre decrecientes.

   (b) Halle la productividad media de ℓ. Compare la productividad marginal PMg_ℓ con la productividad media PMe_ℓ: ¿cuál es mayor? Demuéstrelo.

3. **Minimización de costos y lema de Shephard.** La empresa *Wayne Enterprises* opera con la tecnología $f(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{1/3}$ y debe producir un nivel de producto $q > 0$ al menor costo posible: $\min_{x_1, x_2 \geq 0}\ w_1 x_1 + w_2 x_2$ s.a. $f(x_1, x_2) \geq q$, donde $w_1, w_2 > 0$ son los precios de los insumos.

   (a) Obtenga las demandas condicionadas de insumos $z_1(w, q)$, $z_2(w, q)$ a partir de la condición de tangencia (igualdad entre la TMST y el cociente de precios).

   (b) Derive la función de costos $c(w, q)$.

   (c) Verifique el lema de Shephard: $z_i(w, q) = \partial c / \partial w_i$.

(d) Calcule el costo marginal y el costo medio. ¿Es la curva de costo medio creciente, decreciente o en forma de U? Relacione su respuesta con el grado de homogeneidad de f.

4. De la función de costos a la tecnología: dualidad. *Cyberdyne Systems* produce un único bien con dos insumos. Se desconoce su función de producción, pero se ha estimado su función de costos:

$$c(w_1, w_2, q) = q\left(\sqrt{w_1} + \sqrt{w_2}\right)^2, \qquad w_1, w_2 > 0,\ q \geq 0.$$

(a) Verifique que c es una función de costos admisible: homogénea de grado 1 en w, no decreciente en w y en q, y cóncava en w.

(b) Aplique el lema de Shephard para obtener las demandas condicionadas de insumos $z_1(w, q)$ y $z_2(w, q)$.

(c) Recupere la función de producción $f(z_1, z_2)$ eliminando los precios.

(d) ¿Qué rendimientos a escala exhibe f? Relacione su respuesta con el comportamiento del costo medio y del costo marginal.

5. Rendimientos a escala y forma de la función de costos. Considere una tecnología de un solo producto $q = f(z)$, $z \in \mathbb{R}^L_+$, con función de costos asociada $c(w, q)$.

(a) Si f es homogénea de grado 1 (rendimientos constantes a escala), demuestre que c es homogénea de grado 1 en q; es decir, $c(w, q) = q\, c(w, 1)$. Concluya que el costo medio es independiente de q.

(b) Para $f(z_1, z_2) = z_1^a z_2^b$, indique para qué valores de $a + b$ la tecnología presenta rendimientos crecientes, constantes y decrecientes a escala.

(c) Argumente la relación entre rendimientos decrecientes a escala y un costo medio creciente. Conecte esto con el ejercicio 3.

6. Equilibrio competitivo con costos cúbicos.[1] Cada empresa de una industria perfectamente competitiva tiene la función de costos

$$C(q) = 9000 + 15700\, q - 50\, q^2 + q^3.$$

La demanda de mercado (inversa) es $p = 40000 - Q$, donde $Q = n\, q$ es la cantidad total producida por las n empresas idénticas.

(a) Obtenga el costo medio $CMe(q)$, el costo variable medio $CVMe(q)$ y el costo marginal $CMg(q)$.

(b) Halle la escala eficiente mínima resolviendo $CMg(q) = CMe(q)$, y calcule el costo medio mínimo. Este es el precio de equilibrio de largo plazo p^*.

(c) Use la demanda de mercado para hallar la cantidad total Q^* y el número de empresas n^*.

(d) Verifique que cada empresa obtiene beneficio nulo en este equilibrio y explique el mecanismo de entrada y salida que lo sostiene.

[1]Esta forma cúbica es la que aparece habitualmente en los textos intermedios: genera curvas de costo medio y marginal en forma de U y permite ilustrar el ajuste de entrada y salida hacia beneficio nulo. El ejercicio está tomado del *Problem Set 5* de *Economics 500*, Yale (2023).

Ejercicios propuestos

Los siguientes ejercicios se dejan para la casa. Los marcados con (*) suponen un nivel de dificultad mayor.

7. **Producto marginal, producto medio y máximo técnico.** La firma *Stark Industries* tiene la función de producción $q = 50L - 2L^2 - 10$. ¿A qué nivel de trabajo el producto marginal se cruza con el producto medio? ¿Cuál es el máximo técnico?

8. **Producto marginal del trabajo y capital.** *Kamino Factories* produce limones usando capital y trabajo, con la función de producción $q = 10K + 20L^2 - K^3L^3$. ¿El producto marginal del trabajo aumenta o se reduce cuando el capital crece? Justifique.

9. **TMST y estudio en conjunto.** Alonso e Isabella estudian para los exámenes de certificación como contadores públicos (CPA). Alonso prefiere leer leyes y regulaciones (R), mientras que Isabella prefiere practicar auditorías (A). La puntuación de Alonso sigue $S_{\text{Al}} = 10\,A^{0.65}R^{0.35}$ y la de Isabella $S_{\text{Is}} = 10\,A^{0.4}R^{0.6}$.

   (a) ¿En qué punto será igual la Tasa Marginal de Sustitución Técnica (TMST) entre la práctica de auditorías y la lectura de regulaciones para ambos?

   (b) Como estudian juntos, sus puntuaciones cambian al agregar el tiempo de estudio conjunto G: $S_{\text{Al}} = 10\,A^{0.65}R^{0.35} + G^{0.5}$ y $S_{\text{Is}} = 10\,A^{0.4}R^{0.6} + G^{0.5}$. Encuentre la TMST entre G y el método de estudio preferido de cada uno. ¿Podemos determinar quién está dispuesto a renunciar a una mayor cantidad de su método preferido para estudiar juntos?

10. **Equilibrio competitivo: tecnologías convexas y no convexas. (*)**[2] Analice por separado las siguientes industrias perfectamente competitivas, todas con empresas idénticas.

    (a) *Costo estrictamente convexo sin costo fijo.* $C(q) = 15700\,q + 50\,q^2$. Dibuje CMe y CMg y explique con precisión por qué es problemático construir un equilibrio competitivo de largo plazo con esta función de costos (atienda a la escala óptima de cada empresa).

    (b) *Costo cuadrático con costo fijo.* $C(q) = 100\,q^2 + 10000$ para $q > 0$ (y $C(0) = 0$), con demanda $p = 10000 - Q$. Halle el costo medio mínimo, el precio de equilibrio, la cantidad por empresa, el número de empresas y la cantidad total. Verifique beneficio nulo.

    (c) *Costo lineal con costo fijo.* $C(q) = 100\,q + 10000$ para $q > 0$ (y $C(0) = 0$), con demanda $p = 10000 - Q$. Examine el comportamiento del costo medio y argumente por qué esta tecnología (rendimientos crecientes) es incompatible con la competencia perfecta.

    (d) En (b), el término fijo 10000 parece un costo fijo, pero suele afirmarse que en el largo plazo no hay costos fijos. Proponga una interpretación de los términos de $C(q)$ que reconcilie ambas afirmaciones.

[2] *Problem Set 5*, Yale (2023), Pregunta 3.

11. **Maximización de beneficios con tecnología Cobb-Douglas.** La empresa competitiva *Wayne Enterprises* produce un único bien con la tecnología

$$f(x_1, x_2) = x_1^{1/3}\, x_2^{1/3},$$

donde $x_1, x_2 \geq 0$ son insumos. El precio del producto es $p > 0$ y los precios de los insumos son $w_1, w_2 > 0$. La empresa resuelve $\max_{x_1,x_2 \geq 0}\ p\, f(x_1, x_2) - w_1 x_1 - w_2 x_2$.

   (a) Verifique que f es homogénea de grado $2/3$ y explique por qué ese grado garantiza la existencia de una solución interior al problema de beneficios.

   (b) Plantee las condiciones de primer orden y obtenga las demandas de insumos $x_1(p, w)$, $x_2(p, w)$ y la función de oferta $y(p, w)$.

   (c) Determine los signos de $\partial y/\partial p$, $\partial x_1/\partial w_1$, $\partial x_1/\partial w_2$ y $\partial x_1/\partial p$. Interprete cada uno.

   (d) Verifique que la función de beneficios $\pi(p, w) = p\, y - w_1 x_1 - w_2 x_2$ es homogénea de grado 1 en (p, w_1, w_2).

12. **Propiedades de la función de beneficios y lema de Hotelling.**[3] Sea $Y \subseteq \mathbb{R}^L$ un conjunto de producción cerrado y con libre disposición. Para un vector de precios $p \gg 0$ defina la función de beneficios y la oferta neta como

$$\pi(p) = \max_{y \in Y}\ p \cdot y, \qquad y(p) = \arg\max_{y \in Y}\ p \cdot y,$$

y suponga que $y(p)$ es una función (univaluada) diferenciable.

   (a) Demuestre que π es homogénea de grado 1: $\pi(\lambda p) = \lambda\, \pi(p)$ para todo $\lambda > 0$.

   (b) Demuestre que π es convexa en p.

   (c) Demuestre el lema de Hotelling: $y(p) = \nabla \pi(p)$, es decir, $y_\ell(p) = \partial \pi/\partial p_\ell$.

   (d) Concluya que la matriz $D_p\, y(p) = D_p^2\, \pi(p)$ es simétrica, semidefinida positiva y satisface $D_p\, y(p)\, p = 0$. Interprete económicamente la diagonal de esta matriz (la ley de la oferta).

13. **De la función de beneficios a las ofertas netas: WAPM y ley de la oferta. (*)**[4] *Tyrell Corporation*, que produce un bien ($y_2 \geq 0$) a partir de un insumo ($y_1 \leq 0$), tiene la función de beneficios

$$\pi(p_1, p_2) = \frac{p_2^2}{4\, p_1}, \qquad p_1, p_2 > 0.$$

   (a) Aplique el lema de Hotelling para recuperar las ofertas netas $y_1(p)$ y $y_2(p)$.

   (b) Recupere la función de producción $y_2 = f(-y_1)$ eliminando los precios. ¿Qué rendimientos a escala exhibe?

   (c) Verifique que la matriz de sustitución $D_p\, y(p)$ es simétrica, semidefinida positiva y cumple $D_p y(p)\, p = 0$.

[3] Versión en el lenguaje abstracto de conjuntos de producción del *Problem Set 5*, Yale (2023); véase también Varian, *Análisis Microeconómico* (1997), Cap. 3.

[4] *Economics 500*, Yale (2023).

(d) *Axioma débil de la maximización de beneficios (WAPM).* Sean $y' = y(p')$ e $y'' = y(p'')$ las elecciones óptimas a dos precios distintos. Demuestre, directamente de la optimalidad, que $(p' - p'') \cdot (y' - y'') \geq 0$. Deduzca como caso particular la ley de la oferta: $\partial y_2/\partial p_2 \geq 0$.

14. Estática comparativa general: teorema de la función implícita y estática comparativa monótona. (*)[5] Una empresa competitiva usa dos insumos con tecnología $f(x_1, x_2)$ y maximiza $p\,f(x_1, x_2) - w_1 x_1 - w_2 x_2$. No se compromete con ninguna forma funcional explícita.

(a) Enuncie las propiedades que se espera de una función de producción "bien comportada" (monotonía, concavidad, condiciones de segundo orden).

(b) Escriba las condiciones de primer orden y aplique el teorema de la función implícita para obtener $\partial x_i/\partial w_j$ y $\partial x_i/\partial p$. Indique cuáles signos quedan determinados y cuáles son ambiguos.

(c) Explique qué significa que el objetivo $p\,f(x) - w \cdot x$ tenga *diferencias crecientes* en (x_i, p) y que sea *supermodular* en (x_1, x_2). ¿Qué restricciones imponen estas propiedades sobre f?

(d) Usando estática comparativa monótona (sin diferenciar), establezca el signo de $\partial x_i/\partial p$. Compare las ventajas y desventajas de este enfoque frente al del teorema de la función implícita.

15. Existencia de solución al problema de la empresa. (*)[6]

(a) En el problema del consumidor, la continuidad de u junto con la compacidad del conjunto presupuestal bastan para garantizar solución. Dé un ejemplo de función de producción continua para la cual el problema de maximización de beneficios *no* tenga solución.

(b) Se afirma a veces que si el conjunto de producción Y es convexo, entonces el problema de beneficios tiene solución. Dé un contraejemplo.

(c) Proponga la mejor condición suficiente que encuentre para que el problema de beneficios tenga solución.

(d) Suponga que los dueños de la empresa obtienen utilidad de los beneficios según una función $U(\pi)$ estrictamente creciente, y que es ésta la que se maximiza. ¿Cuáles de los resultados de maximización de beneficios se mantienen y cuáles no?

[5] *Problem Set 4*, Yale (2023), Pregunta 1.
[6] *Problem Set 5*, Yale (2023), Pregunta 2.