

Microeconomía 1

Práctica Dirigida 5

Profesor: José Gallardo Ku (j.gallardo@pucp.edu.pe)

Jefes de práctica: Marcelo Gallardo (marcelo.gallardo@pucp.edu.pe)

Raúl Amao (raul.amao@pucp.edu.pe)

Los ejercicios marcados con (\star) o $(\star\star)$ presentan una dificultad mayor o mucho mayor a la de los ejercicios clásicos de las dirigidas o calificadas. Están pensados para los alumnos interesados en profundizar en aspectos axiomáticos o matemáticos del curso. No son ejercicios obligatorios o evaluables en calificada.

1 Ejercicios para la sesión de práctica

1.1 Ecuación de Slutsky

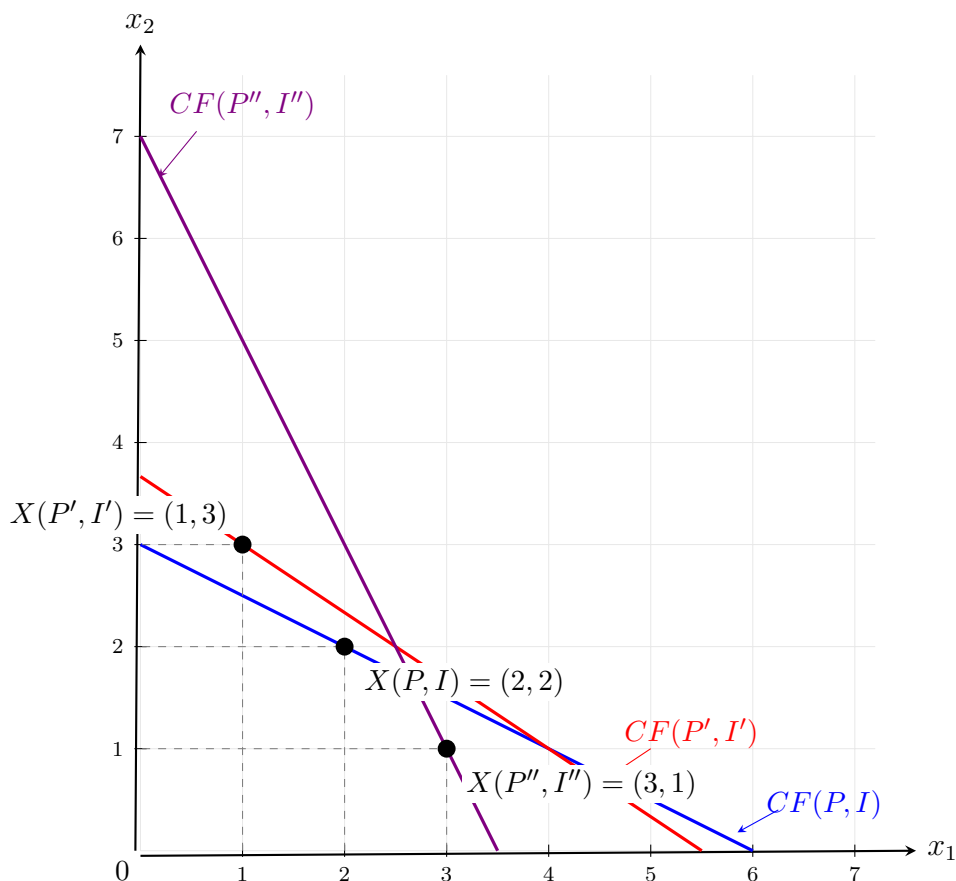
1. **Función de utilidad cuasilineal.** La preferencia de Carlos por café (x) y chocolates (y) puede ser representada por la función de utilidad

$$u(x, y) = x + \ln(y).$$

- (a) Escriba la ecuación de Slutsky para ambos bienes.
- (b) Si $p_x = 3$, $p_y = 1$ e $I = 150$, evalúe el efecto total sobre x ante un aumento de p_x y descompóngalo en efecto sustitución e ingreso.
- (c) Con los mismos valores iniciales, evalúe el efecto de un aumento de p_y sobre y y descompóngalo en sus dos componentes.

1.2 Preferencia revelada y axioma débil

1. **Tres escenarios presupuestarios.** En el siguiente gráfico se representan las elecciones del consumidor, $X(P, I)$, $X(P', I')$ y $X(P'', I'')$ en tres escenarios presupuestarios alternativos $CF(P, I)$, $CF(P', I')$ y $CF(P'', I'')$, respectivamente.



- Identifique las relaciones de preferencia revelada entre las canastas elegidas.
- Evalúe si las elecciones son consistentes con el axioma débil de la preferencia revelada (WARP).

2. **WARP con datos numéricos.** El siguiente cuadro muestra información parcial sobre las compras de un consumidor de dos bienes A y B . ¿Para qué valores de x el comportamiento del consumidor puede considerarse *inconsistente* con el WARP?

	Cesta 1		Cesta 2	
	Cantidad	Precio	Cantidad	Precio
Bien A	100	100	120	100
Bien B	100	100	x	80

1.3 Números índices y bienestar

1. **Análisis a partir de la ENAHO-Panel.** El Módulo de Sumarias de la ENAHO-Panel del INEI muestra la información de cantidades y precios consumidos por el consumidor J en 2024 y 2025. El ingreso nominal de J no varió entre ambos años.

	2024		2025	
	Unidades	Precio	Unidades	Precio
Alimentos (x)	6	40	5	42
Vestidos (y)	20	20	10	43

- Defina y calcule el índice de gasto M .
- Calcule el índice de precios de Laspeyres L_p .
- Calcule el índice de precios de Paasche P_p .
- Compare (b) y (c) con M y evalúe el bienestar de J .

1.4 Consumo intertemporal (modelo de dos períodos)

- Ahorrador y endeudador puros con preferencias CRRA.** Considere a un consumidor con preferencias intertemporalmente aditivas y utilidad instantánea CRRA:

$$U(C_0, C_1) = u(C_0) + \delta u(C_1), \quad u(C) = \frac{C^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}, \quad \sigma > 0, \quad \delta = \frac{1}{1+\beta} \in (0, 1).$$

El límite $\sigma \rightarrow 1$ corresponde a $u(C) = \ln C$. Asuma $P_0 = P_1 = 1$ y la restricción intertemporal $C_0 + \frac{C_1}{1+i} = I_0 + \frac{I_1}{1+i} \equiv W$.

- Halle las demandas C_0^* y C_1^* . Muestre que pueden escribirse como

$$C_0^* = \frac{W}{1+\rho}, \quad C_1^* = g C_0^*,$$

donde $g \equiv [\delta(1+i)]^{1/\sigma}$ y $\rho \equiv g/(1+i) = \delta^{1/\sigma}(1+i)^{1/\sigma-1}$. Recupere el caso $\log \sigma \rightarrow 1$.

- Caso ahorrador puro** ($I_0 > 0, I_1 = 0$). Verifique que el ahorro $S_0^* = I_0 - C_0^*$ es positivo y demuestre que

$$\text{sign}\left(\frac{\partial C_0^*}{\partial i}\right) = \text{sign}(\sigma - 1).$$

Interprete los tres regímenes en términos de la EIS = $1/\sigma$.

- Caso endeudador puro** ($I_0 = 0, I_1 > 0$). Demuestre que $\partial C_0^*/\partial i < 0$ para todo $\sigma > 0$ y explique por qué ahora ambos efectos actúan en la misma dirección.
- Discuta gráficamente la rotación de la línea presupuestal alrededor de la dotación $E = (I_0, I_1)$ ante un aumento de i en cada caso.

1.5 Decisión consumo–ocio (oferta laboral)

- Consumo, ocio y oferta laboral Cobb–Douglas.** Un trabajador deriva utilidad del consumo c (con $p = 1$) y del ocio ℓ según

$$U(c, \ell) = c^\alpha \ell^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Dispone de T horas que reparte entre trabajo h y ocio ($h + \ell = T$), salario w y un ingreso no laboral $V \geq 0$.

- (a) Escriba la restricción en términos de (c, ℓ) y muestre que toma la forma $c + w\ell = wT + V \equiv M$ (ingreso completo). Identifique a w como precio del ocio.
- (b) Resuelva el problema y obtenga c^* , ℓ^* y $h^* = T - \ell^*$.
- (c) Calcule $\partial h^*/\partial w$, $\partial h^*/\partial V$ y $\partial h^*/\partial \alpha$. Interprete cada signo.
- (d) Determine el *salario de reserva* w_r y discuta el caso $V = 0$.

2 Ejercicios para la casa

2.1 Slutsky y propiedades de la demanda compensada

- Slutsky para Cobb–Douglas.** Sea $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ con $\alpha \in (0, 1)$, precios (p_1, p_2) e ingreso w .
 - Obtenga las demandas marshallianas $x_i(p, w)$ y la función de utilidad indirecta $v(p, w)$.
 - Obtenga las demandas hicksianas $h_i(p, \bar{u})$ y la función de gasto $e(p, \bar{u})$.
 - Verifique *algebraicamente* la ecuación de Slutsky $\partial x_i / \partial p_j = \partial h_i / \partial p_j - x_j \partial x_i / \partial w$ para $(i, j) = (1, 1)$ y $(i, j) = (1, 2)$.
- (\star) **Ley de demanda compensada.** Demuestre que para todo par de precios $p^0, p^1 \gg 0$ y nivel de utilidad \bar{u} ,

$$(p^1 - p^0)^\top (h(p^1, \bar{u}) - h(p^0, \bar{u})) \leq 0,$$

donde h es la demanda hicksiana. *Sugerencia:* use que $h(p^k, \bar{u})$ minimiza el gasto a precios p^k entre las canastas que alcanzan utilidad \bar{u} .

2.2 Preferencia revelada e índices

- WARP con tres observaciones.** Considere las observaciones (p^t, q^t) para $t = 1, 2, 3$ con $p^1 = (1, 2)$, $q^1 = (4, 2)$; $p^2 = (2, 1)$, $q^2 = (2, 4)$; $p^3 = (1, 1)$, $q^3 = (3, 3)$.
 - Calcule el gasto $p^t \cdot q^s$ para todos los pares (t, s) .
 - ¿Hay alguna violación del WARP entre estas tres observaciones?
- Estudiantes universitarios.** Los estudiantes universitarios consumen dos bienes: transporte público y servicios de telecomunicaciones. En enero, el precio de un viaje en transporte público era de 2 soles y el plan mensual de telecomunicaciones costaba 40 soles. Un estudiante representativo realizaba 120 viajes y consumía 1 plan mensual. En julio, los precios suben a 3 y 50 soles respectivamente, y el estudiante realiza 90 viajes y mantiene 1 plan.
 - Calcule L_p y P_p para julio respecto a enero. ¿Puede afirmarse si el estudiante está mejor o peor?
 - Calcule los índices de cantidades L_Q y P_Q . ¿Coincide la conclusión?

Considere ahora un tercer bien: entretenimiento. En enero el precio era 20 soles con consumo de 4 unidades; en julio el precio sube a 30 soles y la cantidad pasa a 6 unidades.

- Recalcule L_p y P_p con los *tres bienes*. ¿Conclusión de bienestar?
- Recalcule L_Q y P_Q con los *tres bienes*.

3. **Inecuación de Laspeyres–Paasche.** Demuestre que, bajo el supuesto de que el consumidor optimiza, se cumple $L_p \geq P_p$. *Sugerencia:* interprete la desigualdad como consecuencia del comportamiento de sustitución del consumidor frente a cambios de precios relativos.
4. (★★) **Test de Afriat.** Enuncie el teorema de Afriat sobre racionalización de un conjunto finito de observaciones $\{(p^t, q^t)\}_{t=1}^T$ por una función de utilidad continua, monótona y cóncava. Discuta brevemente la relación entre el axioma generalizado de la preferencia revelada (GARP) y la existencia de tal función.

2.3 Consumo intertemporal

1. (★) **Consumo intertemporal logarítmico con horizonte $T + 1$.** Un consumidor vive $T + 1$ períodos, $t = 0, 1, \dots, T$, con utilidad *logarítmica*:

$$U(C_0, C_1, \dots, C_T) = \sum_{t=0}^T \delta^t \ln(C_t), \quad \delta = \frac{1}{1+\beta} \in (0, 1).$$

Recibe ingresos $\{I_t\}_{t=0}^T$, presta y se endeuda a la tasa real i , $A_0 = A_{T+1} = 0$, $P_t \equiv 1$. Defina la riqueza vital $W \equiv \sum_{t=0}^T I_t / (1+i)^t$.

- (a) *Inada e interioridad.* Verifique que $u(C) = \ln C$ cumple las condiciones de Inada y argumente por qué garantizan solución *interior* y que las CPO son suficientes.
- (b) Deduzca la restricción consolidada $\sum_{t=0}^T C_t / (1+i)^t = W$ a partir de la sucesión de restricciones de flujo $A_{t+1} = (1+i)(A_t + I_t - C_t)$.
- (c) Plantee el lagrangiano y obtenga las CPO. Interprete λ^* .
- (d) Combinando las CPO de t y $t + 1$, obtenga la **ecuación de Euler** $u'(C_t) = \delta(1+i)u'(C_{t+1})$, que para $u(C) = \ln C$ equivale a $C_{t+1}/C_t = \delta(1+i) \equiv g$. Comente las tres regiones $\delta(1+i) \gtrless 1$.
- (e) Iterando la Euler obtenga $C_t^* = g^t C_0^*$ y demuestre

$$C_0^* = \frac{1-\delta}{1-\delta^{T+1}} W, \quad C_t^* = [\delta(1+i)]^t C_0^*.$$

Note que la *fracción* de W consumida en $t = 0$ no depende de i .

- (f) Demuestre que $EIS \equiv \partial \ln(C_{t+1}/C_t) / \partial \ln(1+i) = 1$.
- (g) Verifique que para $T = 1$ se recupera $C_0^* = W/(1+\delta)$, el límite log del ejercicio 5 de la práctica dirigida.
- (h) Tome $T \rightarrow \infty$ y muestre que $C_0^* \rightarrow (1-\delta)W$. Interprete (regla de Friedman–ingreso permanente, versión log).