

Microeconomía 1

Práctica Dirigida 4

Profesor: José Gallardo Ku (j.gallardo@pucp.edu.pe)

Jefes de práctica: Marcelo Gallardo (marcelo.gallardo@pucp.edu.pe)

Raúl Amao (raul.amao@pucp.edu.pe)

Temas: dualidad UMP–EMP, lema de Shephard, ecuación de Slutsky, variación compensada y variación equivalente. Suponga solución interior, $p \gg 0$ y $w > 0$ salvo indicación contraria.

Dualidad UMP–EMP

UMP: $\max_{x \geq 0} u(x)$ s.a. $p \cdot x \leq w$. Solución: demanda marshalliana $x(p, w)$; valor óptimo: utilidad indirecta $v(p, w)$.

EMP: $\min_{x \geq 0} p \cdot x$ s.a. $u(x) \geq \bar{u}$. Solución: demanda hicksiana $h(p, \bar{u})$; valor óptimo: función de gasto $e(p, \bar{u})$.

Relaciones de dualidad: $e(p, v(p, w)) = w$, $v(p, e(p, \bar{u})) = \bar{u}$, $x_i(p, w) = h_i(p, v(p, w))$.

Lema de Shephard y ecuación de Slutsky

Lema de Shephard: $h_i(p, \bar{u}) = \frac{\partial e(p, \bar{u})}{\partial p_i}$.

Ecuación de Slutsky: $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \underbrace{\frac{\partial h_i}{\partial p_j}}_{\text{efecto sustitución}} - \underbrace{x_j \frac{\partial x_i}{\partial w}}_{\text{efecto ingreso}}$.

El efecto sustitución propio ($i = j$) siempre satisface $\partial h_i / \partial p_i \leq 0$ (ley de la demanda compensada).

Variación Compensada (VC) y Variación Equivalente (VE)

Cambio de precios $p^0 \rightarrow p^1$, ingreso w fijo. $V^0 = v(p^0, w)$, $V^1 = v(p^1, w)$.

VE: mide el cambio en bienestar a **precios iniciales** p^0 :

$$VE = e(p^0, V^1) - e(p^0, V^0) = e(p^0, V^1) - w.$$

VC: mide el cambio en bienestar a **precios finales** p^1 :

$$VC = e(p^1, V^1) - e(p^1, V^0) = w - e(p^1, V^0).$$

1 Ejercicios de la dirigida

1. **Dualidad con cuasilineal.** Un individuo acaba de comprar una nueva casa y necesita de dos cosas para que sea un buen lugar para vivir: muebles (x) y electrodomésticos (y). Sus preferencias pueden ser representadas a través de la siguiente función de utilidad:

$$u(x, y) = x + \ln(y)$$

Sean p_x, p_y, w los precios y el ingreso que definen el conjunto presupuestal del consumidor.

- Plantear el problema de maximización de utilidad y hallar las funciones de demanda ordinaria. Luego derivar la función de utilidad indirecta.
 - Plantear el problema de minimización del gasto y hallar las funciones de demanda compensada. Luego derivar la función de gasto mínimo.
 - Verificar las relaciones de dualidad: $e(p, v(p, w)) = w$ y $v(p, e(p, \bar{u})) = \bar{u}$.
 - Graficar en un mismo plano las curvas de demanda ordinaria y compensada.
2. **Variación Compensada con Cobb-Douglas.** Considere un consumidor con utilidad Cobb-Douglas $u(x, y) = x^{1/2} y^{1/2}$, un ingreso $I = 100$, y un precio normalizado del bien y tal que $p_y = 1$. ¿Cuál es la variación compensada (VC) de un cambio en el precio del bien x desde p_x hasta p'_x ?

Por simplicidad, puede asumir que $p_x = 1$. Dividiendo ambos precios entre p_x , podemos expresar de manera más compacta el precio inicial como $p_x/p_x = 1$, y el precio final como $p'_x/p_x = p$. Intuitivamente, cuando $p > 1$, se cumple que $p'_x > p_x$, por lo que el bien x se vuelve más caro; y cuando $0 < p < 1$, se cumple que $p'_x < p_x$, por lo que el bien x se vuelve más barato.

- Calcule la cesta óptima y la utilidad **antes** del cambio de precios.
 - Calcule la cesta final y la utilidad **después** del cambio.
 - Calcule la variación compensada usando $VC = I - e(p, V^0)$. Interprete para $p > 1$ y para $0 < p < 1$.
3. **Daron y Jim en el mercado.** Daron y Jim van a un mercado a comprar frutas (x_1 , kg) y verduras (x_2 , kg). Los precios son $p_1 = 4$ y $p_2 = 2$ soles/kg. Cada uno tiene $w = 24$ soles. Sus preferencias son:

- Daron: $u^D = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$.
- Jim: $u^J = \min\{x_1, 2x_2\}$.

- Resuelva el UMP de cada uno. Calcule (x_1^*, x_2^*) y $v(p, w)$.
- Resuelva el EMP de cada uno. Calcule (h_1, h_2) y $e(p, \bar{u})$.

- (c) Verifique las relaciones de dualidad: $e(p, v(p, w)) = 24$ y $v(p, e(p, \bar{u})) = \bar{u}$ para ambos.
- (d) ¿Cuál de los dos se beneficiaría más de una rebaja de 1 sol/kg en frutas? Justifique comparando $\partial v / \partial p_1$.

4. Heckman recupera la utilidad directa. Heckman conoce la función de gasto de un consumidor:

$$e(p_1, p_2, \bar{u}) = \bar{u} p_1^{1/3} p_2^{2/3}.$$

No conoce la función de utilidad directa.

- (a) Verifique que e es homogénea de grado 1 en p y creciente en \bar{u} .
- (b) Use Shephard para obtener $h_1(p, \bar{u})$ y $h_2(p, \bar{u})$.
- (c) Invierta $e = w$ para obtener $v(p, w)$. Use Roy para obtener $x_1(p, w)$ y $x_2(p, w)$.
- (d) Elimine p y w de las expresiones de x_1^* , x_2^* para recuperar $u(x_1, x_2)$. ¿A qué familia conocida corresponde?
- (e) Evalúe en $p = (2, 1)$, $w = 16$. Verifique que $e(p, v(p, w)) = 16$.

5. Ejercicio retador. Del Lema de Shephard a la integral. Considere una función de gasto genérica $e(p_1, p_2, \bar{u})$, diferenciable en p_1 .

- (a) Recuerde el Teorema Fundamental del Cálculo: $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$. Aplíquelo a $f(p_1) = e(p_1, p_2, \bar{u})$ para escribir:

$$e(p_1^1, p_2, \bar{u}) - e(p_1^0, p_2, \bar{u}) = \int_{p_1^0}^{p_1^1} \frac{\partial e}{\partial p_1}(t, p_2, \bar{u}) dt.$$

- (b) Use el lema de Shephard para reescribir el integrando. Concluya por qué $|VC|$ es el área bajo la hicksiana entre p_1^0 y p_1^1 .
- (c) **Aplicación numérica.** Con los datos del ejercicio 2, calcule $\int_1^4 h_1(t, 1, V^0) dt$ y verifique que coincide con $e(p^1, V^0) - e(p^0, V^0)$.

2 Ejercicios para practicar

1. **El hogar de Deaton.** La familia Deaton necesita al menos $a_1 = 2$ kg de arroz y $a_2 = 1$ litro de aceite al mes para subsistir. Su utilidad es Stone-Geary:

$$u = (x_1 - 2)^{1/2} (x_2 - 1)^{1/2}, \quad x_1 > 2, \quad x_2 > 1.$$

Los precios son $p_1 = 3$, $p_2 = 6$, $w = 42$.

- Defina el ingreso discrecional $\hat{w} = w - p_1 a_1 - p_2 a_2$. Calcúlelo.
 - Muestre que el UMP se reduce a un Cobb-Douglas en $\hat{x}_i = x_i - a_i$ con ingreso \hat{w} . Resuelva para (x_1^*, x_2^*) .
 - Obtenga $v(p, w)$ y $e(p, \bar{u})$.
 - Verifique $e(p, v(p, w)) = 42$.
2. **Tirole y el precio del café.** El joven Tirole consume café (x_1 , tazas/semana) y todo lo demás (x_2 , soles). Su utilidad es $u = 2x_1 + 3x_2$ y su presupuesto semanal es $w = 90$ soles. El precio del café sube de $p_1^0 = 3$ a $p_1^1 = 2$ soles/taza; $p_2 = 1$.

- Calcule la cesta y utilidad inicial $V^0 = v(p^0, w)$, y la cesta y utilidad final $V^1 = v(p^1, w)$.
 - Calcule la VC usando $w - e(p^1, V^0)$. Interprete el signo.
 - Calcule la VE usando $e(p^0, V^1) - w$. Interprete el signo.
 - Compare $|VC|$ y $|VE|$. Interprete la diferencia.
3. **Shephard para la Leontief.** Considere $u = \min\{x_1, 3x_2\}$, $p_1 = 2$, $p_2 = 9$.
- Obtenga $e(p, \bar{u})$ resolviendo el EMP (argumente geoméricamente).
 - Aplique Shephard. Observe que e es lineal en cada p_i : ¿qué forma tienen las demandas hicksianas?
 - Si $\bar{u} = 6$, calcule e , h_1 , h_2 . Si $w = e(p, 6)$, verifique que $x_i(p, w) = h_i(p, 6)$.
 - Calcule el efecto sustitución de un cambio en p_1 e interprételo.
4. **Saez descompone con Slutsky.** Saez tiene utilidad $u = x_1 x_2^2$. Los precios son $p = (1, 2)$ y $w = 30$.

- Resuelva el UMP. Calcule x^* y $v(p, w)$.
- Obtenga $e(p, \bar{u})$ invirtiendo v . Verifique con Shephard que $h_1 = \partial e / \partial p_1$.
- Si p_1 sube de 1 a 1.50, descomponga Δx_1 usando Slutsky: efecto sustitución y efecto ingreso.
- Calcule las participaciones $s_1 = p_1 x_1 / w$ y $s_2 = p_2 x_2 / w$.