PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IOP224 – INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Práctica Dirigida 3

Primer semestre 2026-1

Temas: optimización irrestricta, estática comparativa, teorema de la envolvente, multiplicadores de Lagrange y aplicaciones a microeconomía (UMP, EMP, minimización de costos, maximización del beneficio).

I. Ejercicios para la sesión de práctica

1. (Optimización irrestricta.) Considere la función

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

(a) Halle todos los puntos críticos de f.

(b) Calcule la matriz hessiana H_f y clasifique cada punto crítico (máximo, mínimo, silla).

(c) ¿El extremo encontrado es local o global? Justifique.

2. (Estática comparativa vía TFI: firma competitiva.) Una firma competitiva enfrenta un precio $p > 0$ y produce $q \geq 0$ unidades con función de costos $c(q) = \alpha q^2$, $\alpha > 0$. Su beneficio es $\pi(q; p, \alpha) = pq - \alpha q^2$.

(a) Plantee y resuelva el problema $\max_{q \geq 0} \pi(q; p, \alpha)$, verifique la SOC y obtenga $q^*(p, \alpha)$.

(b) Sin sustituir q^* explícitamente, defina la *condición de primer orden* como $F(q; p, \alpha) = \pi'(q; p, \alpha) = p - 2\alpha q = 0$. Verifique las hipótesis del TFI ($\partial F/\partial q \neq 0$ en el óptimo) y aplique el TFI para calcular $\dfrac{\partial q^*}{\partial p}$ y $\dfrac{\partial q^*}{\partial \alpha}$ a partir de

$$\frac{\partial q^*}{\partial p} = -\frac{\partial F/\partial p}{\partial F/\partial q}, \qquad \frac{\partial q^*}{\partial \alpha} = -\frac{\partial F/\partial \alpha}{\partial F/\partial q}.$$

Compare con el cálculo directo a partir de $q^* = p/(2\alpha)$.

(c) Interprete económicamente los signos obtenidos.

3. (Teorema de la envolvente – Lema de Hotelling.) Un productor utiliza trabajo $L \geq 0$ para producir un bien mediante $f(L) = \sqrt{L}$. Vende el producto al precio $p > 0$ y paga el salario $w > 0$. Su función de beneficio es

$$\pi(p, w) = \max_{L \geq 0} \left[p\sqrt{L} - wL \right].$$

(a) Resuelva el problema interior y obtenga $L^*(p, w)$, la oferta $y^*(p, w) = \sqrt{L^*}$, y la función de beneficio indirecta $\pi(p, w)$.

(b) Verifique el *lema de Hotelling*: $\dfrac{\partial \pi}{\partial p} = y^*(p, w)$ y $\dfrac{\partial \pi}{\partial w} = -L^*(p, w)$.

4. (Lagrange – UMP Cobb–Douglas.) Un consumidor tiene preferencias $u(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$, enfrenta precios $p_1, p_2 > 0$ e ingreso $I > 0$. Resuelva el problema de maximización de utilidad

$$\max_{x_1, x_2 > 0} \; u(x_1, x_2) \quad \text{sujeto a} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = I,$$

vía el método de Lagrange. Obtenga las demandas marshallianas $x_1^*(p, I), x_2^*(p, I)$, el multiplicador λ^* y la utilidad indirecta $v(p, I)$. ¿Qué interpreta económicamente λ^*?

5. (UMP con preferencias Stone–Geary.) Considere ahora un consumidor con *preferencias Stone–Geary*:

$$u(x_1, x_2) = (x_1 - \gamma_1)^{\alpha} (x_2 - \gamma_2)^{1-\alpha}, \qquad \alpha \in (0, 1), \; \gamma_1, \gamma_2 \geq 0,$$

donde γ_i representa el *consumo de subsistencia* del bien i. Se asume $x_i > \gamma_i$ y que el ingreso I supera el costo de la canasta de subsistencia: $I > p_1 \gamma_1 + p_2 \gamma_2$.

(a) Mediante el cambio de variable $y_i = x_i - \gamma_i$, reduzca el UMP a un problema Cobb–Douglas en las variables (y_1, y_2) con un *ingreso efectivo* $\tilde{I} = I - p_1 \gamma_1 - p_2 \gamma_2$.

(b) Obtenga las demandas marshallianas $x_1^*(p, I), x_2^*(p, I)$. Verifique que el gasto en cada bien es lineal en los precios y el ingreso (*Sistema de Gasto Lineal*, LES).

(c) Interprete económicamente la estructura de la demanda: ¿qué fracción del "ingreso disponible" se gasta en cada bien?

6. (Lagrange – Minimización del gasto del consumidor.) Con las preferencias del Problema 4, $u(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$, resuelva el problema dual:

$$\min_{x_1, x_2 > 0} \; p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad \text{sujeto a} \quad x_1^{1/2} x_2^{1/2} = \bar{u},$$

donde $\bar{u} > 0$. Obtenga las demandas hicksianas $h_1(p, \bar{u}), h_2(p, \bar{u})$ y la función de gasto $e(p, \bar{u})$. Verifique el *lema de Shephard*: $h_i = \partial e / \partial p_i$.

7. (Minimización de costos del productor.) Una firma produce un bien con la tecnología

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2},$$

donde $x_1, x_2 \geq 0$ son cantidades de los insumos, con precios $w_1, w_2 > 0$. Resuelva el problema de minimización de costos

$$\min_{x_1, x_2 > 0} \; w_1 x_1 + w_2 x_2 \quad \text{sujeto a} \quad \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \bar{q},$$

donde $\bar{q} > 0$ es el nivel de producción deseado.

(a) Obtenga las demandas condicionadas de insumos $x_1^c(w, \bar{q})$ y $x_2^c(w, \bar{q})$.

(b) Obtenga la función de costos $c(w, \bar{q})$ y verifique el *lema de Shephard*: $x_i^c = \partial c / \partial w_i$.

II. Ejercicios para resolver en casa

8. (Optimización irrestricta con varios puntos críticos.) Considere

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

(a) Halle todos los puntos críticos.

(b) Clasifique cada uno usando el criterio del hessiano.

(c) ¿Existe algún extremo global de f en $\mathbb{R}^2$? Justifique.

9. (Estática comparativa: monopolio vía TFI.) Un monopolista enfrenta la demanda inversa $p(q) = a - bq$ $(a, b > 0)$ y produce con costo total $c(q) = cq + F$ $(c \in (0, a),\ F \geq 0)$. Su beneficio es $\pi(q; a, b, c, F) = (a - bq)q - cq - F$.

(a) Plantee y resuelva $\max_{q \geq 0} \pi(q)$. Verifique la SOC y obtenga q^* y p^* en función de los parámetros.

(b) Defina $F(q; a, b, c) = \pi'(q; a, b, c, F)$. Verifique que $\partial F/\partial q \neq 0$ en el óptimo y aplique el **Teorema de la Función Implícita** para calcular $\dfrac{\partial q^*}{\partial a}, \dfrac{\partial q^*}{\partial b}, \dfrac{\partial q^*}{\partial c}$ sin sustituir la solución explícita. *Sugerencia:* $\partial q^*/\partial \theta = -\frac{\partial F/\partial \theta}{\partial F/\partial q}$ *para cada parámetro* θ.

(c) Interprete económicamente los signos obtenidos.

(d) ¿Cuál es el beneficio máximo π^*? Verifique el teorema de la envolvente aplicado al parámetro a: $\dfrac{\partial \pi^*}{\partial a} = q^*$.

10. (Envolvente: Identidad de Roy.) Sea

$$v(p_1, p_2, I) = \max_{x_1, x_2 > 0} u(x_1, x_2) \ \text{ sujeto a } \ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$$

la función de utilidad indirecta. Suponiendo que la solución es interior y los multiplicadores existen, demuestre que se cumple la *identidad de Roy*:

$$x_i^*(p, I) = -\frac{\partial v/\partial p_i}{\partial v/\partial I}, \qquad i = 1, 2.$$

Sugerencia: aplique el teorema de la envolvente al lagrangiano respecto de p_i *y de* I*.*

Verifique la identidad de Roy en el caso $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$ con $p_1, p_2, I > 0$: calcule las demandas marshallianas, la utilidad indirecta y compruebe la fórmula.

11. (Elección intertemporal: del caso de 2 períodos al caso general T.) Un consumidor vive T períodos, indexados $t = 0, 1, \ldots, T-1$. En el período t recibe un ingreso exógeno $w_t \geq 0$, consume $c_t > 0$, y puede prestar o pedir prestado a una tasa de interés $r > 0$ (constante). Sus preferencias son

$$U(c_0, c_1, \ldots, c_{T-1}) = \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t \ln c_t, \qquad \beta \in (0,1),$$

y la restricción presupuestaria intertemporal es

$$\sum_{t=0}^{T-1} \frac{c_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=0}^{T-1} \frac{w_t}{(1+r)^t} =: W,$$

donde $W > 0$ es la *riqueza descontada total* (valor presente de los ingresos).

(a) Caso de 2 períodos. Tome $T = 2$. Resuelva el problema vía Lagrange y obtenga c_0^*, c_1^*. Identifique cuándo el consumidor es *prestamista* ($c_0^* < w_0$) y cuándo es *prestatario.* Considerando el caso $w_1 = 0$, calcule $\partial c_0^*/\partial r$ e interprete económicamente (efectos sustitución vs ingreso bajo utilidad logarítmica).

(b) Caso general T. Para T arbitrario:

(i) Plantee el lagrangiano y derive las condiciones de primer orden (la *ecuación de Euler* relacionando c_t con c_{t+1}).

(ii) Demuestre que el consumo óptimo crece de manera geométrica: $c_t^* = \left[\beta(1+r)\right]^t c_0^*$.

(iii) Use la restricción presupuestaria para obtener

$$c_0^* = \frac{1-\beta}{1-\beta^T} W.$$

(Sugerencia: la suma geométrica $\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t = \frac{1-\beta^T}{1-\beta}$.)

(iv) Discuta la trayectoria de c_t^*:

- Si $\beta(1+r) > 1$: ¿crece o decrece el consumo?
- Si $\beta(1+r) = 1$: ¿qué ocurre?
- Si $\beta(1+r) < 1$: ¿crece o decrece?

Interprete el papel de la *paciencia* β y la tasa r.

(v) Verifique que en el límite $T \to \infty$ (vida infinita) y $\beta < 1$, $c_0^* \to (1-\beta)W$.

12. (Problema dual del productor.) Una empresa produce con tecnología $f(x_1, x_2) = x_1^{1/4} x_2^{1/4}$, donde $x_1, x_2 \geq 0$ son insumos con precios $w_1, w_2 > 0$. El precio del producto es $p > 0$.

(a) **Minimización de costos:** Resuelva $\min_{x_1,x_2>0}\ w_1x_1 + w_2x_2$ s.a. $x_1^{1/4} x_2^{1/4} = \bar{q}$. Obtenga las demandas condicionadas $x_i^c(w, \bar{q})$ y la función de costos $c(w, \bar{q})$.

(b) Verifique el *lema de Shephard*: $x_i^c = \partial c/\partial w_i$.

(c) **Maximización de beneficios:** Resuelva $\max_{q\geq 0}\ pq - c(w, q)$. Obtenga la oferta $q^*(p, w)$ y la función de beneficio $\pi^*(p, w)$.

(d) Verifique el *lema de Hotelling*: $q^* = \partial\pi^*/\partial p$ y $x_i^* = -\partial\pi^*/\partial w_i$ (donde $x_i^* = x_i^c(w, q^*)$ son las demandas no condicionadas).

Referencias

- Fondo Editorial PUCP. *Álgebra Lineal y Optimización para el Análisis Económico* de Chávez y Gallardo (2025).

- Mas-Colell, A., Whinston, M. D., y Green, J. R. *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, 1995.

Profesor del curso: Jorge Chávez. Jefe de prácticas: Marcelo Gallardo.