Facultad de Ciencias Sociales
Especialidad de Economía
Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)
Ciclo 2026-1

Microeconomía 1
Práctica Dirigida 3

Profesor: José Gallardo Ku (j.gallardo@pucp.edu.pe)

Jefes de práctica: Marcelo Gallardo (marcelo.gallardo@pucp.edu.pe)
Raúl Amao (raul.amao@pucp.edu.pe)

Temas: utilidad indirecta, identidad de Roy y minimización del gasto. El UMP es $\max_{x\geq 0} u(x)$ s.a. $p\cdot x \leq w$; el EMP (problema dual) es $\min_{x\geq 0} p\cdot x$ s.a. $u(x) \geq \bar{u}$. Suponga solución interior, $p \gg 0$ y $w > 0$ salvo indicación contraria.

Los ejercicios marcados con ($\star$) o ($\star\star$) presentar una dificultad mayor o mucho mayor a la de los ejercicios clásicos de las dirigidas o calificadas. Están pensados para los alumnos interesados en profundizar en aspectos axiomáticos o matemáticos del curso. No son ejercicios obligatorios o evaluables en calificada.

1 Ejercicios para la sesión de práctica

1.1 Utilidad indirecta e identidad de Roy

1. **Cuatro funciones de utilidad.** Para cada función, resuelva el UMP y obtenga las demandas marshallianas $x_1(p,w)$, $x_2(p,w)$ y la utilidad indirecta $v(p,w)$.

   (a) **Cobb-Douglas.** $u(x_1,x_2) = x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$, $\alpha,\beta > 0$, $\bar{\alpha} = \alpha + \beta$.

   (b) **Lineal.** $u(x_1,x_2) = a\,x_1 + b\,x_2$, $a,b > 0$. Analice todos los casos según a/p_1 vs. b/p_2.

   (c) **Leontief.** $u(x_1,x_2) = \min\{a\,x_1,\, b\,x_2\}$, $a,b > 0$. Argumente geométricamente que en el óptimo $a\,x_1^* = b\,x_2^*$.

   (d) **($\star\star$) CES.** $u(x_1,x_2) = \left(\alpha_1 x_1^{\rho} + \alpha_2 x_2^{\rho}\right)^{1/\rho}$, $\alpha_i > 0$, $\rho < 1$, $\rho \neq 0$, $\sigma = 1/(1-\rho)$. Discuta los casos límite $\rho \to 0$ y $\rho \to -\infty$.

2. **Identidad de Roy.**

   (a) **Demostración vía la envolvente.** Considere el lagrangiano $\mathcal{L} = u(x) + \lambda\,(w - p\cdot x)$. Aplique el teorema de la envolvente a los parámetros p_i y w para obtener $\partial v/\partial p_i$ y $\partial v/\partial w$ en términos de λ^* y $x_i^*(p,w)$. Derive la **identidad de Roy**:

   $$x_i(p,w) = -\frac{\partial v/\partial p_i}{\partial v/\partial w}, \quad i = 1,\dots,n.$$

   ¿Qué signo tiene $\partial v/\partial p_i$ y por qué aparece el signo negativo?

(b) Verifique la identidad de Roy para Cobb-Douglas y Leontief.

(c) Verifique la identidad de Roy para $a/p_1 > b/p_2$ y para $a/p_1 < b/p_2$. ¿Qué pasa cuando $a/p_1 = b/p_2$?

3. **Recuperar la demanda desde v.** En cada caso, use la identidad de Roy para obtener $x_1(p, w)$ y $x_2(p, w)$ sin resolver el UMP. Verifique la ley de Walras e identifique la función de utilidad.

(a) $v = \dfrac{w^2}{4\,p_1\,p_2}$.

(b) $v = w\left(\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2}\right)$.

(c) $v = \dfrac{a\,b\,w}{b\,p_1 + a\,p_2}$, $a, b > 0$.

1.2 Minimización del gasto y dualidad

1. **EMP para cuatro funciones.** Para cada función del ejercicio 1, resuelva el EMP y obtenga las demandas hicksianas $h_i(p, \bar{u})$ y la función de gasto $e(p, \bar{u})$.

(a) Cobb-Douglas: $u = x_1^\alpha x_2^\beta$.

(b) Lineal: $u = ax_1 + bx_2$.

(c) Leontief: $u = \min\{ax_1, bx_2\}$.

(d) CES: $u = (\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)^{1/\rho}$. Exprese e en términos de $P = \left(\sum_j \alpha_j^\sigma p_j^{1-\sigma}\right)^{1/(1-\sigma)}$, con $\sigma = \frac{1}{1-\rho}$.

2. **La función de gasto es cóncava en p.** Sea $e(p, \bar{u})$ la función de gasto de cualquier consumidor con preferencias continuas y estrictamente crecientes. Demuestre que para todo $p^0, p^1 \gg 0$ y $\theta \in (0, 1)$:

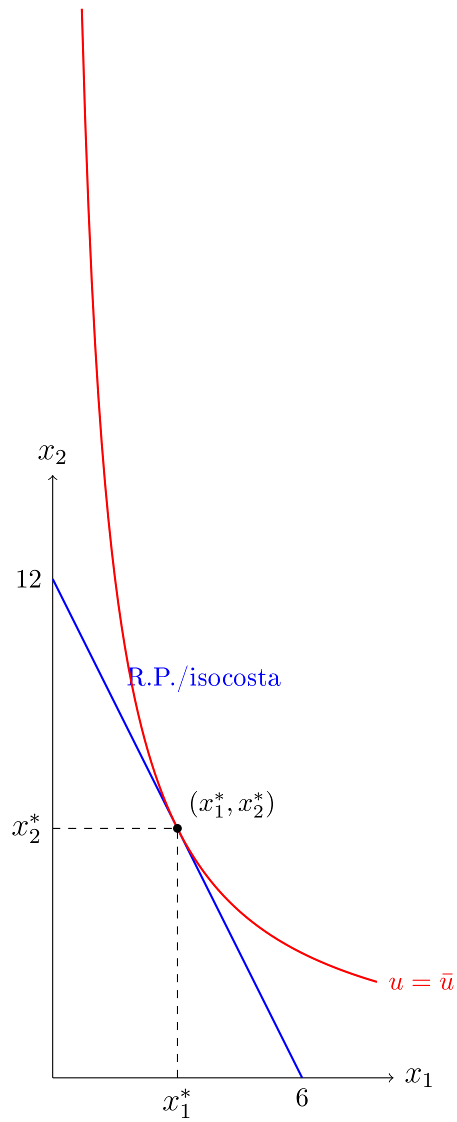
$$e\big(\theta p^0 + (1-\theta)p^1,\ \bar{u}\big) \ \geq\ \theta\, e(p^0, \bar{u}) + (1-\theta)\, e(p^1, \bar{u}).$$

¿Qué implica económicamente la concavidad?

3. **Dualidad UMP–EMP y gráfica.** Use Cobb-Douglas con $\bar{\alpha} = 1$.

(a) Verifique las relaciones de dualidad: $e\big(p, v(p, w)\big) = w$ y $v\big(p, e(p, \bar{u})\big) = \bar{u}$.

(b) Con $\alpha = \beta = 1/2$, $(p_1, p_2) = (2, 1)$, $w = 12$: calcule (x_1^*, x_2^*) y $\bar{u} = v(p, w)$. En un gráfico (como el de referencia a continuación) dibuje la restricción presupuestaria, la curva de indiferencia óptima y la isocosta mínima del EMP. Muestre que ambos óptimos coinciden.



(c) Explique geométricamente por qué el UMP y el EMP tienen el mismo óptimo.

2 Ejercicios para la casa

2.1 Identidad de Roy y utilidad indirecta

1. **Propiedades de la utilidad indirecta.** Para Cobb-Douglas con $\bar{\alpha} = 1$, $v = K\,w/(p_1^{\alpha} p_2^{\beta})$:
   (a) Verifique que v es homogénea de grado cero en (p, w).
   (b) Verifique que v es decreciente en p_i y creciente en w.
   (c) Muestre que $s_i = p_i x_i/w = -\partial \ln v/\partial \ln p_i$.
   (d) Demuestre que v es cuasiconvexa en p (fijado w). *Sugerencia:* interprete económicamente por qué un precio promedio no puede ser mejor que el mejor precio extremo.

2. **Stone-Geary.** Sea $u = (x_1 - a_1)^{b_1}(x_2 - a_2)^{b_2}$, $a_i \geq 0$, $b_i > 0$, $b_1 + b_2 = 1$, $w > p_1 a_1 + p_2 a_2$.
   (a) Obtenga $v(p, w)$.
   (b) Verifique la identidad de Roy para $i = 1, 2$.
   (c) Interprete $\lambda^* = \partial v/\partial w$ en términos del ingreso discrecional $\hat{w} = w - p_1 a_1 - p_2 a_2$.

3. **Bienestar y elasticidades vía Roy.** Sea $v(p_1, p_2, w) = w\,p_1^{-1/2} p_2^{-1/2}$.
   (a) Use Roy para obtener x_1 y x_2.
   (b) Calcule $\varepsilon_{11} = (\partial x_1/\partial p_1)(p_1/x_1)$ y $\varepsilon_{1w} = (\partial x_1/\partial w)(w/x_1)$.
   (c) Si $p_i \to \lambda p_i$ y $w \to \lambda w$, ¿cambia el bienestar? Justifique con la homogeneidad de v.

4. **Recuperar la utilidad directa.** Dada $v(p_1, p_2, w) = w^2/(p_1\,p_2)$:
   (a) Use Roy para obtener x_1 y x_2.
   (b) Invierta $v = \bar{u}$ para obtener $e(p, \bar{u})$.
   (c) Use $h_k = \partial e/\partial p_k$ y la relación $x_k = h_k$ en el óptimo para recuperar $u(x_1, x_2)$. ¿A qué función conocida corresponde?

2.2 Minimización del gasto: propiedades

1. ($\star$) **Propiedades de e para la CES.** Con $e(p, \bar{u}) = \bar{u}\,P$, $P = \left(\alpha_1^{\sigma} p_1^{1-\sigma} + \alpha_2^{\sigma} p_2^{1-\sigma}\right)^{1/(1-\sigma)}$:
   (a) Verifique $e(\lambda p, \bar{u}) = \lambda e(p, \bar{u})$.
   (b) Verifique $\partial e/\partial \bar{u} > 0$.
   (c) Verifique el lema de Shephard: $\partial e/\partial p_i = h_i(p, \bar{u})$.

2. ($\star\star$) Sea $u : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ una función de utilidad *continua*, *estrictamente cuasicóncava*, *estrictamente creciente* y *diferenciable*. Para $p \gg 0$ y $\bar{u}$ en el rango de u, defina la *función de gasto*

$$e(p, \bar{u}) \;=\; \min_{x \geq 0} \; p \cdot x \quad \text{s.a.} \quad u(x) \geq \bar{u},$$

y denote por $h(p, \bar{u}) = (h_1, \ldots, h_n)$ a su solución, la *demanda hicksiana*. Supóngase además que el óptimo es interior.

Justifique brevemente por qué cada uno de los supuestos anteriores es necesario para que el problema esté bien planteado y la demanda hicksiana sea una función diferenciable de $(p, \bar{u})$. En particular, explicite el rol de:

(i) la continuidad de u y $p \gg 0$ (existencia del mínimo);

(ii) la monotonía estricta de u (la restricción se activa con igualdad);

(iii) la cuasiconcavidad estricta (unicidad de h);

(iv) la diferenciabilidad de u y el carácter interior de la solución (uso de condiciones de primer orden con igualdad).

Demuestre el Lema de Shephard: para cada $i = 1, \ldots, n$,

$$\frac{\partial e(p, \bar{u})}{\partial p_i} = h_i(p, \bar{u}).$$

Puede apoyarse en el teorema de la envolvente[1].

[1] **Teorema de la envolvente.** Sea $V(\theta) = \min_x \mathcal{L}(x, \lambda^*; \theta)$ la función de valor de un problema de optimización con parámetro θ y solución diferenciable $(x^*(\theta), \lambda^*(\theta))$. Entonces $\dfrac{\partial V(\theta)}{\partial \theta} = \left.\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}\right|_{(x^*(\theta), \lambda^*(\theta))}$, es decir, basta derivar el lagrangiano respecto al parámetro manteniendo las variables de elección y los multiplicadores fijos en su valor óptimo.