PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA
IOP224 – INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Práctica Dirigida 2

Primer semestre 2026-1

I. Topología en $\mathbb{R}^n$

1. Sea $a \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Pruebe que

$$B_{\|\cdot\|_1}(a;r) \;\subset\; B_{\|\cdot\|_2}(a;r) \;\subset\; B_{\|\cdot\|_\infty}(a;r).$$

2. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ no vacíos.

(a) Si A es abierto, pruebe que $A + B = \{a + b : a \in A,\, b \in B\}$ es abierto.

(b) ¿Es cierto que si A y B son cerrados, entonces $A + B$ es cerrado? Pruebe o dé contraejemplo.

(c) Pruebe que si A es compacto y B es cerrado, entonces $A + B$ es cerrado.

3. Pruebe que el *conjunto presupuestario (Walrasiano)*

$$B(p,w) = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : p^\top x \leq w\}, \qquad p \gg 0,\ w > 0,$$

es compacto.

II. Conjuntos Convexos

1. Considere el conjunto

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ :\ \min\left\{\frac{x_1}{a_1}, \ldots, \frac{x_n}{a_n}\right\} \geq c \right\},$$

donde $a_1, \ldots, a_n > 0$ y $c \geq 0$.

(a) Pruebe que U es convexo.

(b) Grafique U para $n = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $c = 1$.

(c) Interprete U en términos económicos como conjunto de requerimiento de insumos de una tecnología Leontief.

2. Sea

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|Ax - b\|_\infty \leq 1\},$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Determine si K es un conjunto convexo.

3. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in (0,1)$ con $\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 1$. Considere el conjunto

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n_{++} : \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \geq 1 \right\}.$$

Pruebe que X es convexo. *(Sugerencia: tome logaritmo y use concavidad de* ln.*)*

4. Sea $Y \subset \mathbb{R}^n$ una **tecnología**[1]. Se dice que Y:

- presenta *rendimientos a escala no crecientes* si para todo $y \in Y$ y $\alpha \in [0,1]$: $\alpha y \in Y$;

[1] En teoría económica de la producción, una *tecnología* $Y \subset \mathbb{R}^L$ es el conjunto de vectores de producción factibles $y = (y_1, \ldots, y_L)$. Por convención, $y_\ell > 0$ indica que el bien ℓ es producto (output) y $y_\ell < 0$ indica que es insumo (input).

- es *aditiva* si para todo $y, y' \in Y$: $y + y' \in Y$.

Demuestre que Y presenta rendimientos no crecientes y es aditiva **si y sólo si** Y es un *cono convexo*[2].

5. Se dice que una tecnología $Y \subset \mathbb{R}^L$ presenta la *propiedad de libre disposición* si para todo $y \in Y$ e $y' \leq y$ (componente a componente), entonces $y' \in Y$. Demuestre que si Y es cerrada, convexa y satisface $-\mathbb{R}^L_+ \subset Y$, entonces Y cumple libre disposición.

(Interpretación: un productor siempre puede "desperdiciar" insumos o desechar producto.)

6.

(a) Demuestre que la intersección de una familia arbitraria de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

(b) Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $S \subset \mathbb{R}^n$, use la parte anterior para demostrar que

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \|x - y\|, \ \forall\, y \in S\}$$

es convexo.

(Sugerencia: eleve al cuadrado la desigualdad $\|x - x_0\| \leq \|x - y\|$, expanda y simplifique para obtener una desigualdad lineal en x. Interprete X como intersección de semiespacios.)

III. Funciones Convexas y Cóncavas

1. Pruebe que $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2$ es convexa.

2. (Función de producción CES.) Considere la función de producción de tipo CES (*Constant Elasticity of Substitution*) generalizada $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\, x_i^\rho\right)^{1/\rho}, \qquad \rho \in (0,1), \quad \alpha_i > 0.$$

Nota histórica. La función CES fue introducida por Kenneth Arrow (matemático y premio Nobel de Economía 1972), H. B. Chenery, B. S. Minhas y Robert Solow (matemático y premio Nobel de Economía 1987) en 1961. Los parámetros α_i representan las participaciones de los insumos en la producción, y ρ determina la facilidad de sustitución entre insumos: ρ cerca de 1 indica sustitutos cercanos (la función se aproxima a la lineal), mientras que $\rho \to 0^+$ converge a la Cobb–Douglas y $\rho \to -\infty$ a la Leontief $\min\{x_i/a_i\}$. La elasticidad de sustitución $\sigma = 1/(1-\rho)$ mide qué tan fácilmente se puede reemplazar un insumo por otro ante cambios en los precios relativos.

(a) Verifique que f es *homogénea de grado 1*: $f(tx) = t\,f(x)$ para todo $t > 0$.

(b) Usando la desigualdad de Minkowski para $0 < \rho < 1$ (que se enuncia a continuación), pruebe que f es *superaditiva*: $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n_+$.

Desigualdad de Minkowski para $0 < p < 1$: dados $a, b \in \mathbb{R}^n_+$,

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \geq \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\, a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\, b_i^p\right)^{1/p}.$$

(c) Concluya que f es *cóncava*.

[2] Un subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es un *cono convexo* si es cerrado bajo combinaciones lineales no negativas: para todo $y, y' \in K$ y todo $\alpha, \beta \geq 0$, se cumple $\alpha y + \beta y' \in K$.

3. Sean $f : D_1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : D_2 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones convexas. Pruebe que

$$h(x) = \max\{f(x),\, g(x)\}, \qquad h : D_1 \cap D_2 \to \mathbb{R},$$

es convexa.

4. (Desigualdades integrales.) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa y continua.

(a) Pruebe que para todo intervalo $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \;\leq\; \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

(Sugerencia: parametrice $x = (1-t)a + tb$ con $t \in [0, 1]$ y aplique la definición de convexidad.)

(b) Para $h > 0$ fijo, defina

$$f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt.$$

Pruebe que si f es convexa, $f_h(x) \geq f(x)$.

(Sugerencia: sustituya $t = x + sh$ con $s \in [-1, 1]$, agrupe $f(x+sh) + f(x-sh)$ y use convexidad.)

Problemas Adicionales

A1. Sea $T : X \to Y$ una transformación lineal entre espacios vectoriales y $A \subset X$ un subconjunto convexo. Pruebe que $T(A)$ es convexo en Y.

A2. Sean $C_1, \ldots, C_k \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos convexos. Pruebe que la intersección $\bigcap_{i=1}^k C_i$ es convexa. Deduzca que el *conjunto factible* de un sistema de desigualdades lineales $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ es convexo.

A3. Si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son convexas y $\alpha, \beta \geq 0$, pruebe que $\alpha f + \beta g$ es convexa.

A4. Sea $C([0,1])$ el espacio de funciones continuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, equipado con la norma del supremo $\|f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

(a) Considere la sucesión $f_n(t) = \dfrac{nt}{1 + n^2t^2}$ para $n \geq 1$. Determine si (f_n) converge en $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

(b) Pruebe que $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ es un *espacio de Banach* (espacio normado completo): toda sucesión de Cauchy converge.

(Sugerencia para (b): si (f_n) es de Cauchy en $\|\cdot\|_\infty$, entonces para cada $t \in [0,1]$ fijo la sucesión $(f_n(t)) \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy. Defina $f(t) = \lim_n f_n(t)$ y pruebe que $f_n \to f$ uniformemente; el límite uniforme de funciones continuas es continuo.)

A5. Pruebe que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p.$$

(Sugerencia: si $M = \|x\|_\infty$, escriba $\|x\|_p = M\big(\sum_i (|x_i|/M)^p\big)^{1/p}$ y analice $\big(\sum_i (|x_i|/M)^p\big)^{1/p} \to 1$.)

A6. Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es *convexo en su punto medio* si, siempre que $a, b \in C$, el promedio $(a+b)/2$ también pertenece a C. Demuestre que si C es *cerrado* y convexo en su punto medio, entonces C es convexo.

A7. Pruebe que

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \ln\left(\sum_{i=1}^n e^{x_i}\right)$$

es convexa sobre $\mathbb{R}^n$.

(Sugerencia: aplique la desigualdad de Hölder: dados $a, b \in \mathbb{R}^n$ y $p, q \in (1,\infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se tiene $\sum_{i=1}^n |a_ib_i| \leq \big(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\big)^{1/p}\big(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\big)^{1/q}$.)

Referencias

- Fondo Editorial PUCP. *Álgebra Lineal y Optimización para el Análisis Económico* de Chávez y Gallardo (2025).

Profesor del curso: Jorge Chávez. Jefe de prácticas: Marcelo Gallardo.