

Microeconomía 1

Práctica Dirigida 2

Profesor: José Gallardo Ku (j.gallardo@pucp.edu.pe)

Jefes de práctica: Marcelo Gallardo (marcelo.gallardo@pucp.edu.pe)

Raúl Amao (raul.amao@pucp.edu.pe)

En todos los ejercicios, el problema del consumidor es

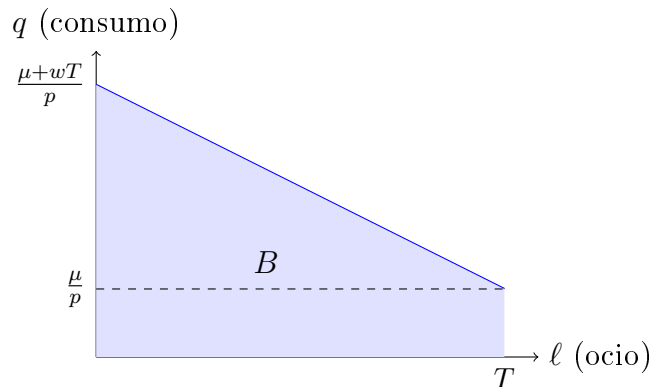
$$\max_{x \geq 0} u(x) \quad \text{s.a.} \quad p \cdot x \leq w.$$

Salvo indicación contraria, suponga solución interior, precios $p \gg 0$ e ingreso $w > 0$.

1 Ejercicios para la sesión de práctica

1.1 Restricción presupuestaria

1. (Adaptado de Deaton y Muellbauer (1980)). Considere un trabajador que dispone de $T = 24$ horas, de las cuales elige ℓ horas de ocio y trabaja $T - \ell$ horas a un salario w por hora. Su ingreso no laboral es $\mu \geq 0$. El precio de un bien compuesto de consumo q es p .



- (a) Escriba la restricción presupuestaria y verifique que corresponde a la figura.
- (b) Suponga que el trabajador paga un impuesto con tasa $t \in (0, 1)$ sobre el ingreso laboral que exceda un umbral \bar{y} . Grafique la nueva restricción presupuestaria. ¿Es convexo el nuevo conjunto presupuestario?

- (c) Suponga que existen dos tasas de salario: w por las primeras H horas de trabajo y $w' > w$ por las horas adicionales (sobretiempo). Grafique la restricción presupuestaria resultante. ¿Es convexa?
2. (Adaptado de Deaton y Muellbauer (1980)). **Tarifa en bloques.** Un hogar consume combustible (q_1) y otros bienes (q_2). Las primeras \bar{q}_1 unidades de combustible cuestan p_1 por unidad y las unidades adicionales cuestan $p'_1 < p_1$ (descuento por volumen). El ingreso es m y el precio de otros bienes es p_2 .
- (a) Escriba algebraicamente la restricción presupuestaria para $q_1 \leq \bar{q}_1$ y para $q_1 > \bar{q}_1$.
- (b) ¿Es convexo el conjunto presupuestario resultante? Justifique.

1.2 Preferencias y problema del consumidor

1. Maximización de utilidad con racionamiento (caso combustible en Lima).

Debido a un accidente en la cadena de suministro, el combustible en Lima se vuelve escaso. Como medida de emergencia, el gobierno impone un racionamiento: cada consumidor no puede comprar más de \bar{x}_1 unidades de combustible al mes.

Sea x_1 el consumo de combustible y x_2 el consumo de todos los demás bienes. El consumidor tiene ingreso m y enfrenta precios p_1 y p_2 . El conjunto presupuestario relevante es

$$B(p, w, \bar{x}_1) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m, x_1 \leq \bar{x}_1\}.$$

Considere ahora dos tipos de consumidores:

- Un **taxista**, cuyas preferencias están representadas por

$$u_T(x_1, x_2) = x_1^{3/4} x_2^{1/4}.$$

- Una persona que realiza **trabajo remoto cuatro días por semana**, cuyas preferencias están representadas por

$$u_R(x_1, x_2) = x_1^{1/4} x_2^{3/4}.$$

- (a) Determine la restricción presupuestaria (grafique).
- (b) Plantee el problema de maximización de utilidad de cada consumidor.
- (c) Halle la demanda marshalliana de cada consumidor en ausencia de racionamiento.
- (d) Determine la canasta óptima de cada consumidor cuando existe racionamiento.
- (e) Compare económicamente el efecto del racionamiento sobre ambos consumidores.
- (f) Represente gráficamente un caso en el que el racionamiento es vinculante para el taxista pero no para el trabajador remoto.
2. **Cobb-Douglas** ($n = 2$). Sea $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$ con $\alpha, \beta > 0$. Resuelva el problema de maximización de utilidad.

3. **CES** ($n = 2$). Sea $u(x_1, x_2) = (\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)^{1/\rho}$ con $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ y $\rho < 1$, $\rho \neq 0$. Resuelva el problema de maximización de utilidad.

4. **Stone-Geary** ($n = 2$). Sea

$$u(x_1, x_2) = (x_1 - a_1)^{b_1} (x_2 - a_2)^{b_2}, \quad x_i > a_i,$$

con $a_i \geq 0$, $b_i > 0$ y $b_1 + b_2 = 1$. Resuelva el problema del consumidor. Pista: defina $\hat{w} = w - p_1 a_1 - p_2 a_2$.

5. **Cobb-Douglas** (n bienes). Sea $u(x) = A \prod_{k=1}^n x_k^{\alpha_k}$ con $A > 0$, $\alpha_k > 0$, y $\bar{\alpha} = \sum_{k=1}^n \alpha_k$. Resuelva el problema de maximización de utilidad.

6. **Curvas de indiferencia atípicas**. Para cada caso, construya curvas de indiferencia que satisfagan todos los axiomas estándar *excepto uno*, y dé un ejemplo económico concreto.

- (a) Uno de los “bienes” es en realidad un *mal*.
- (b) Saciedad en un bien, pero no en el otro.
- (c) Punto de saciedad global (“punto de felicidad”): más de cualquier bien reduce la utilidad.
- (d) Un bien que se convierte en mal a partir de cierta cantidad.

7. **Bien, mal e interior**. Considere $u(x, y) = \frac{\sqrt{x}}{y+1}$, con precios $p_x = p_y = 1$ y renta $w > 0$.

- (a) Calcule las utilidades marginales $\partial u / \partial x$ y $\partial u / \partial y$. ¿Es x un bien? ¿Es y un bien o un *mal*? Justifique.
- (b) ¿Puede existir una solución interior? Razone usando las condiciones de optimalidad.
- (c) Resuelva el problema de maximización y obtenga x^* e y^* .
- (d) ¿Qué axioma de preferencias está violando esta función de utilidad respecto al bien y ?

2 Ejercicios para la casa

2.1 Preferencias y curvas de indiferencia

1. **TMS decreciente y cuasiconcavidad (\star).** Demuestre que si $u(x_1, x_2)$ es dos veces diferenciable y estrictamente cuasicóncava, entonces la TMS es decreciente a lo largo de una curva de indiferencia.

Pista: Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente cuasicóncava, entonces $f_2^2 f_{11} - 2f_1 f_2 f_{12} + f_1^2 f_{22} < 0$, donde $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

2. **Utilidades marginales independientes.** Se dice que dos bienes tienen utilidades marginales independientes si $u_{12} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$.

(a) Demuestre que si $u_{11} < 0$, $u_{22} < 0$ y $u_{12} = 0$, entonces la TMS es decreciente en valor absoluto (preferencias convexas).

(b) Proporcione un ejemplo de función con TMS decreciente pero $u_{12} \neq 0$.

3. **Bienes que interfieren.** Considere dos bienes que individualmente generan utilidad creciente pero cuyo consumo conjunto reduce la utilidad marginal de cada uno.

(a) Proponga una forma funcional para $u(x_1, x_2)$.

(b) Calcule la TMS.

(c) ¿Qué supuestos estándar sobre preferencias viola esta estructura?

2.2 Maximización de Utilidad

Indicaciones: revisar el problema de maximización de la utilidad, y para algunos incisos, la definición de función de utilidad indirecta, así como la identidad de Roy.

1. **Leontief ($n = 2$).** Sea $u(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$ con $a, b > 0$. Sujeto a $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq w$:

(a) Argumente geoméricamente por qué el óptimo satisface $ax_1^* = bx_2^*$.

(b) Obtenga las funciones de demanda marshalliana $x_1(p, w)$ y $x_2(p, w)$.

(c) Obtenga la función indirecta de utilidad $v(p, w)$.

2. **Leontief (n bienes).** Sea $u(x) = \min_{k=1, \dots, n} \{a_k x_k\}$ con $a_k > 0$. Obtenga las funciones de demanda marshallianas y la función indirecta de utilidad. *Pista:* generalice el argumento del ejercicio anterior.

3. **Stone-Geary (n bienes).** Sea $u(x) = \prod_{\ell=1}^n (x_\ell - a_\ell)^{b_\ell}$ con $\sum_{\ell} b_\ell = 1$, $b_\ell > 0$, $a_\ell \geq 0$, y $w > \sum_{\ell} p_\ell a_\ell$.

(a) Interprete los parámetros a_ℓ y b_ℓ .

(b) Obtenga las funciones de demanda y la función indirecta de utilidad.

4. **CES (n bienes).** Sea $u(x) = (\sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell x_\ell^\rho)^{1/\rho}$ con $\alpha_\ell > 0$, $\rho < 1$, $\rho \neq 0$. Obtenga las demandas marshallianas. Discuta los casos límite $\rho \rightarrow 0$, $\rho = 1$ y $\rho \rightarrow -\infty$.

- 5. Cobb-Douglas: demanda y propiedades.** Sea $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$ con $\alpha, \beta > 0$.
- (a) Resuelva el problema de maximización y obtenga $x_1(p, w)$, $x_2(p, w)$ y $v(p, w)$.
 - (b) Verifique que las demandas son **homogéneas de grado cero** en (p, w) .
 - (c) Verifique la **Ley de Walras**: $p_1x_1 + p_2x_2 = w$.
- 6.** Para más adelante: obtenga la función de utilidad indirecta para todos los problemas de maximización de la utilidad abordados y verifique la identidad de Roy.