Facultad de Ciencias Sociales
Especialidad de Economía
Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)
Ciclo 2026-1

Microeconomía 1

Práctica Dirigida 10

Bienes públicos, externalidades y capital en el tiempo

Profesor: José Gallardo Ku (j.gallardo@pucp.edu.pe)

Jefes de práctica: Marcelo Gallardo (marcelo.gallardo@pucp.edu.pe)
Raúl Amao (raul.amao@pucp.edu.pe)

Salvo indicación contraria, los agentes son tomadores de precios, las soluciones son interiores y los precios e ingresos son estrictamente positivos. Las firmas con nombre propio se usan solo para fijar ideas. Los ejercicios marcados con $(*)$ son de mayor dificultad.

Ejercicios para la sesión de prácticas

Bienes públicos y externalidades

Ejercicio 1. *Externalidad de producción, impuesto pigouviano y teorema de Coase.*

Dos firmas tomadoras de precios se ubican sobre un río. Aguas arriba, **Stark Industries** (S) produce acero s y vierte contaminación $x \geq 0$. Aguas abajo, **Wayne Enterprises** (F) produce pescado f y resulta afectada por la contaminación. Las funciones de costo son separables:

$$C_S(s,x) = \tfrac{1}{2}s^2 + \tfrac{1}{2}(a-x)^2, \qquad C_F(f,x) = \tfrac{1}{2}f^2 + \tfrac{\theta}{2}x^2,$$

con $a > 0$, $\theta > 0$ y $0 \leq x \leq a$. Los precios son p_S y p_F. Para lo numérico use $a = 100$, $\theta = 1$, $p_S = 40$, $p_F = 30$.

(a) **Equilibrio descentralizado.** Plantee $\max_{s,x} \Pi_S$ y $\max_f \Pi_F$. Obtenga las CPO de S en s y en x y muestre que la firma contaminante elige $x^* = a$. Verifique que $\partial C_S/\partial x < 0$ y que F no controla x. Calcule s^*, x^*, f^*.

(b) **Asignación eficiente (fusión).** Considere la firma fusionada que maximiza $\Pi_U = \Pi_S + \Pi_F$. Derive la CPO en x y muestre que equivale a $-\partial C_S/\partial x = \partial C_F/\partial x$. Obtenga $\hat{x} = a/(1+\theta)$, compárelo con x^* y cuantifique la pérdida de eficiencia del equilibrio descentralizado.

(c) **Impuesto pigouviano.** Si S paga un impuesto t por unidad de contaminación, determine t^* que descentraliza $\hat{x}$ y evalúelo.

(d) **Derechos de propiedad y Coase.** (i) Asigne a F el derecho sobre el agua limpia (cobra q por unidad de contaminación): plantee ambos problemas, resuelva el mercado de permisos y obtenga x y q^*. (ii) Asigne a S el derecho a contaminar (la pesquera le paga por abatir). Muestre que en ambos casos el nivel negociado es $\hat{x}$ (teorema de Coase) y diga qué cambia entre las dos asignaciones.

Ejercicio 2. *Bien público puro: condición de Samuelson, agregación vertical y precios de Lindahl.*

Dos consumidores, A y B, un bien privado x_i (numerario, precio 1) y un bien público $G \geq 0$ producido a costo marginal constante $c > 0$. Preferencias cuasilineales

$$u_i(x_i, G) = x_i + \theta_i \ln G, \qquad i \in \{A, B\},$$

con ingresos m_i. Para lo numérico use $\theta_A = 60$, $\theta_B = 40$, $c = 10$.

(a) **Óptimo de Pareto.** Plantee el problema del planificador y deduzca la condición de Samuelson $\text{TMS}^A + \text{TMS}^B = \text{TMT}$. Calcule $\text{TMS}^i(G)$ y obtenga G^*.

(b) **Agregación vertical.** Interprete $\text{TMS}^i(G) = \theta_i/G$ como demanda inversa (disposición marginal a pagar) por el bien público. Construya la demanda agregada y muestre que, para un bien público, las demandas se suman *verticalmente* (no horizontalmente). Recupere G^* igualando la agregada a c.

(c) **Precios de Lindahl.** Defina precios personalizados (p_A, p_B) con $p_A + p_B = c$ que hagan que ambos demanden el mismo G. Obtenga los precios que implementan G^* y verifique $p_A + p_B = c$. ¿Por qué el mecanismo es vulnerable a la subdeclaración de preferencias?

Capital en el tiempo

Ejercicio 3. *Descuento continuo, perpetuidades y duración.*

La tasa de interés real instantánea es $r > 0$ y constante.

(a) Un activo paga un flujo continuo de 1 u.m. por unidad de tiempo durante $[0, T]$. Calcule $\text{PDV} = \int_0^T e^{-rt}\, dt$ y obtenga su límite cuando $T \to \infty$ (perpetuidad). Interprete.

(b) Verifique, en tiempo discreto, que el valor presente de un pago N por periodo a perpetuidad es N/i (use la serie geométrica).

(c) **Paralelismo suma–integral.** Muestre cómo, al subdividir cada periodo y hacer continuo el descuento, $\sum_{n \geq 1} N(1+i)^{-n}$ se transforma en $\int_0^\infty N e^{-rt}\, dt$, y relacione i con r.

(d) Defina la *duración* del flujo como

$$D = \frac{\displaystyle\int_0^T t\, f(t)\, e^{-rt}\, dt}{\displaystyle\int_0^T f(t)\, e^{-rt}\, dt},$$

interprétela como el tiempo medio de espera del pago típico y calcúlela para un flujo constante a perpetuidad ($f \equiv 1$, $T \to \infty$).

Ejercicio 4. *Momento óptimo de cosecha: la regla interés = tasa de crecimiento.*

Un activo en maduración (un barril de whisky que añeja) tiene en t un valor $V(t) = \exp\{2\sqrt{t} - 0.15\,t\}$ (en dólares). La tasa de interés real continua es r. El propietario elige t para maximizar $\text{PDV}(t) = e^{-rt}V(t)$.

(a) Plantee la CPO y muestre que equivale a $V'(t)/V(t) = r$. Para $r = 0.05$, halle t^*.

(b) Verifique la condición de segundo orden.

(c) Para un árbol con valor de madera $f(t) = \exp\{0.4\sqrt{t}\}$, muestre que $r = f'(t)/f(t)$ da $t^* = (0.2/r)^2$. Evalúela para $r = 0.04$ y $r = 0.05$ y calcule el signo de dt^*/dr.

(d) Interprete la regla. ¿Por qué el costo inicial de plantar es irrelevante para t^*? ¿Qué ocurre cuando sube r?

Ejercicios propuestos

Ejercicio 5. *Productor competitivo con producto contaminante (impuesto especial).*

Una firma perfectamente competitiva enfrenta precio $P = 20$ y costo marginal privado $MC = 0.4q$, con q la producción diaria.

(a) ¿Cuántas unidades produce la firma?

(b) Un estudio estima el costo marginal social en $SMC = 0.5q$. Con $P = 20$, ¿cuál es el nivel socialmente óptimo y qué impuesto especial por unidad lo induce?

(c) Grafique e identifique la pérdida irrecuperable de eficiencia sin impuesto.

Ejercicio 6. *Recurso de propiedad común: externalidad de congestión.*

En la isla de Pago Pago hay 2 lagos y 20 pescadores. Cada pescador elige un lago y se queda con la captura *promedio* de su lago. En el lago x, $F_x = 10\,\ell_x - \frac{1}{2}\ell_x^2$; en el lago y, $F_y = 5\,\ell_y$.

(a) Bajo acceso libre, ¿cuál es la captura total? (Sugerencia: se igualan las capturas promedio.)

(b) ¿Cuántos pescadores deberían pescar en el lago x para maximizar la captura total? ¿Cuál es la captura óptima?

(c) ¿Cuál debe ser el costo de una licencia para pescar en x (en pescados) que induzca la asignación óptima?

(d) Explique la conexión entre derechos de propiedad y externalidades que ilumina este ejemplo.

Ejercicio 7. *Frontera de posibilidades con un bien público.*

La FPP de una economía que produce un bien público x y un bien privado y es $100\,x^2 + y^2 = 5000$. Hay 100 individuos idénticos con utilidad $u = \sqrt{x\,y_i}$, donde $y_i = y/100$. El bien público es no excluyente.

(a) Si los mercados fueran competitivos, ¿qué niveles se producirían y cuál sería la utilidad del individuo típico?

(b) ¿Cuáles son los niveles óptimos de x y y y la utilidad del individuo típico? ¿Cómo debería gravarse el consumo de y para lograrlo?

Ejercicio 8. *Costo de uso del capital.*

Cyberdyne Systems posee una máquina de precio p que alquila a otras firmas. La máquina se deprecia a tasa d y la tasa de interés real es r.

(a) Con mercado de alquiler competitivo (sin beneficios de largo plazo), derive la tasa de alquiler $v = p(r+d)$ e identifique sus componentes. Calcule v para $p = 10000$, $r = 0.05$, $d = 0.15$.

(b) Para $d = 0$, muestre que $v/p = r$ y que la máquina equivale a un bono perpetuo; obtenga $p = v/r$.

(c) Si el precio de la máquina crece a una tasa esperada π, muestre (por arbitraje) que $v = p(r + d - \pi)$ e interprete el caso $\pi > r + d$.

(d) Interprete el costo de uso como interés más depreciación menos ganancia de capital esperada.

Ejercicio 9. $(*)$ *Precios de recursos agotables: la regla de Hotelling.*

Una firma posee un yacimiento finito. Sea $x(t)$ el stock y $q(t)$ la extracción, con $\dot{x} = -q$, $x(0) = \bar{x}$, $x(\infty) = 0$. El costo marginal es $c(t)$ y el precio $p(t)$. La firma maximiza

$$\pi = \int_0^\infty \big(p(t) - c(t)\big)\, q(t)\, e^{-rt}\, dt, \qquad r > 0.$$

(a) Plantee el Hamiltoniano y derive las CPO. Muestre que el precio sombra (de valor presente) del stock es constante.

(b) Derive la regla de Hotelling $\dot{p} = r(p - c) + \dot{c}$.

(c) Resuelva para $c = 0$ ($p(t) = p_0 e^{rt}$) y para $c(t) = c_0 e^{\gamma t}$ ($p(t) = (p_0 - c_0)e^{rt} + c_0 e^{\gamma t}$).

(d) ¿Por qué la renta de escasez $p - c$ debe crecer a la tasa r?

Ejercicio 10. *Rotación forestal óptima (Faustmann).*

Un bosque puede replantarse indefinidamente. El valor de la madera de un rodal de edad T es $p\, f(T)$, con $f' > 0$, $f'' < 0$; replantar cuesta $C \geq 0$ al inicio de cada rotación. La tasa de descuento continua es r.

(a) **Rotación única.** Si el terreno se vende tras la primera cosecha (con $C = 0$), muestre que la edad óptima cumple $f'(T)/f(T) = r$ (regla del Ejercicio 4).

(b) **Rotación infinita.** El valor del terreno con replantaciones perpetuas es $V(T) = \dfrac{p\, f(T)e^{-rT} - C}{1 - e^{-rT}}$. Maximice respecto de T y obtenga la condición de Faustmann $p\, f'(T) = r\, p\, f(T) + r\, V(T)$.

(c) Compare ambas rotaciones y explique por qué el costo de oportunidad del terreno acorta la rotación. ¿Qué ocurre con T^* cuando aumenta r?