**Facultad de Ciencias Sociales**
**Especialidad de Economía**
Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)
Ciclo 2026-1

# Microeconomía 1
## Práctica Calificada 2 — Solucionario

**Profesor:** José Gallardo Ku **Jefes de práctica:** Marcelo Gallardo, Raúl Amao

---

*Convenciones*: $I > 0$ denota el ingreso, $p = (p_1, p_2)$ con $p_i > 0$ los precios, $\bar{u}$ el nivel de utilidad, $VC$ la variación compensada y $VE$ la variación equivalente. EMP es el problema de minimización del gasto y UMP el de maximización de la utilidad.

---

**Pregunta 1** (5 puntos). *Utilidad indirecta e identidad de Roy.*

Función de utilidad indirecta:

$$v(p_1, p_2, I) = \frac{I^3}{27\, p_1\, p_2^2}, \qquad p_i, I > 0.$$

(a) (1 pt) Verificar el signo de las derivadas parciales.

**Respuesta.** Calculamos las tres derivadas parciales aplicando reglas elementales:

$$\frac{\partial v}{\partial I} \;=\; \frac{3I^2}{27\, p_1\, p_2^2} \;=\; \frac{I^2}{9\, p_1\, p_2^2} \;>\; 0,$$

luego $v$ es *estrictamente creciente* en el ingreso.

$$\frac{\partial v}{\partial p_1} \;=\; I^3 \cdot \frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{1}{27\, p_1\, p_2^2}\right) \;=\; -\,\frac{I^3}{27\, p_1^2\, p_2^2} \;<\; 0,$$

luego $v$ es *estrictamente decreciente* en $p_1$.

$$\frac{\partial v}{\partial p_2} \;=\; I^3 \cdot \frac{\partial}{\partial p_2}\left(\frac{1}{27\, p_1\, p_2^2}\right) \;=\; -\,\frac{2\, I^3}{27\, p_1\, p_2^3} \;<\; 0,$$

luego $v$ es *estrictamente decreciente* en $p_2$. Las tres desigualdades son estrictas porque $I, p_1, p_2 > 0$. Esto es consistente con las propiedades teóricas de toda función de utilidad indirecta. ✓

(b) (2 pts) Demandas marshallianas vía identidad de Roy.

**Respuesta.** La identidad de Roy establece que, para preferencias localmente no saciadas y soluciones interiores,

$$x_i(p, I) \;=\; -\,\frac{\partial v(p, I)/\partial p_i}{\partial v(p, I)/\partial I}, \qquad i = 1, 2.$$

**Demanda del bien 1.** Sustituyendo lo obtenido en (a):

$$x_1(p, I) \;=\; -\,\frac{-\,I^3/(27\,p_1^2\,p_2^2)}{I^2/(9\,p_1\,p_2^2)} \;=\; \frac{I^3}{27\,p_1^2\,p_2^2}\cdot\frac{9\,p_1\,p_2^2}{I^2} \;=\; \frac{9\,I}{27\,p_1} \;=\; \frac{I}{3\,p_1}.$$

**Demanda del bien 2.** Análogamente,

$$x_2(p, I) \;=\; -\,\frac{-\,2\,I^3/(27\,p_1\,p_2^3)}{I^2/(9\,p_1\,p_2^2)} \;=\; \frac{2\,I^3}{27\,p_1\,p_2^3}\cdot\frac{9\,p_1\,p_2^2}{I^2} \;=\; \frac{18\,I}{27\,p_2} \;=\; \frac{2\,I}{3\,p_2}.$$

$$\boxed{x_1(p, I) \;=\; \frac{I}{3\,p_1}, \qquad x_2(p, I) \;=\; \frac{2\,I}{3\,p_2}.}$$

Las cuotas de gasto son $1/3$ y $2/3$ respectivamente, lo cual sugiere preferencias Cobb–Douglas con parámetros $\alpha = 1/3$ y $\beta = 2/3$ (lo confirmaremos en (d)).

(c) (1 pt) Ley de Walras.

**Respuesta.**

$$p_1\,x_1(p, I) + p_2\,x_2(p, I) \;=\; p_1\cdot\frac{I}{3\,p_1} + p_2\cdot\frac{2\,I}{3\,p_2} \;=\; \frac{I}{3} + \frac{2\,I}{3} \;=\; I.\ \checkmark$$

La igualdad presupuestaria $\sum_i p_i x_i = I$ se cumple para todo $(p, I)$, confirmando que las demandas son consistentes con la restricción de presupuesto.

(d) (1 pt) Recuperación de la utilidad directa.

**Respuesta. Estrategia:** despejar los precios de las demandas marshallianas y sustituirlos en $v(p, I)$. El valor resultante, expresado en términos de $(x_1, x_2)$, debe coincidir (salvo transformación monótona) con la utilidad directa.

De $x_1 = I/(3p_1)$ obtenemos $p_1 = I/(3x_1)$.
De $x_2 = 2I/(3p_2)$ obtenemos $p_2 = 2I/(3x_2)$.

Sustituimos en $v$:

$$v \;=\; \frac{I^3}{27\,p_1\,p_2^2} \;=\; \frac{I^3}{27\cdot\dfrac{I}{3\,x_1}\cdot\left(\dfrac{2\,I}{3\,x_2}\right)^2} \;=\; \frac{I^3}{27\cdot\dfrac{I}{3\,x_1}\cdot\dfrac{4\,I^2}{9\,x_2^2}}.$$

Simplificando el denominador:

$$27\cdot\frac{I}{3\,x_1}\cdot\frac{4\,I^2}{9\,x_2^2} \;=\; \frac{27\cdot 4\,I^3}{27\,x_1\,x_2^2} \;=\; \frac{4\,I^3}{x_1\,x_2^2}.$$

Por lo tanto,

$$v \;=\; \frac{I^3\,x_1\,x_2^2}{4\,I^3} \;=\; \frac{x_1\,x_2^2}{4}.$$

La función de utilidad directa puede tomarse como

$$\boxed{u(x_1, x_2) \;=\; x_1\,x_2^2}$$

(o cualquier transformación monótona, p. ej. $u^{1/3} = x_1^{1/3}\, x_2^{2/3}$).

Pertenece a la familia **Cobb–Douglas** con exponentes $\alpha = 1/3$ y $\beta = 2/3$ (consistente con las cuotas de gasto observadas en (b)).

**Pregunta 2** (5 puntos). *Minimización del gasto.*

Utilidad cuasilineal en $x_2$:

$$u(x_1, x_2) \;=\; \sqrt{x_1} + x_2, \qquad x_1, x_2 \geq 0.$$

(a) (2 pts) EMP, demandas hicksianas y función de gasto.

**Respuesta. Planteamiento.**

$$\min_{x_1, x_2 \geq 0} \; p_1\, x_1 + p_2\, x_2 \quad \text{s.a.} \quad \sqrt{x_1} + x_2 \;\geq\; \bar{u}.$$

La utilidad es estrictamente creciente en cada bien, por lo que la restricción se satisface con igualdad en el óptimo.

**Lagrangiano.**

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) \;=\; p_1\, x_1 + p_2\, x_2 \;+\; \lambda\big(\bar{u} - \sqrt{x_1} - x_2\big).$$

**Condiciones de primer orden (CPO) interiores.**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \;=\; p_1 - \frac{\lambda}{2\sqrt{x_1}} \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda \;=\; 2\, p_1 \sqrt{x_1},$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \;=\; p_2 - \lambda \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda \;=\; p_2,$$

más la restricción $\sqrt{x_1} + x_2 = \bar{u}$.

**Igualando los multiplicadores.** De $2p_1\sqrt{x_1} = p_2$ se obtiene

$$\sqrt{x_1} \;=\; \frac{p_2}{2\, p_1} \;\Longrightarrow\; x_1 \;=\; \frac{p_2^2}{4\, p_1^2}.$$

Observe que $x_1$ *no depende* de $\bar{u}$: es la huella típica de una utilidad cuasilineal (el bien 2 absorbe los efectos ingreso).

**Sustitución en la restricción.**

$$x_2 \;=\; \bar{u} - \sqrt{x_1} \;=\; \bar{u} - \frac{p_2}{2\, p_1}.$$

$$\boxed{h_1(p, \bar{u}) \;=\; \frac{p_2^2}{4\, p_1^2}, \qquad h_2(p, \bar{u}) \;=\; \bar{u} - \frac{p_2}{2\, p_1}.}$$

La solución interior requiere $\bar{u} \geq p_2/(2p_1)$; en caso contrario se tiene la solución de esquina $h_2 = 0,\; h_1 = \bar{u}^2$. En adelante asumimos el caso interior.

**Función de gasto.**

$$e(p,\bar{u}) \;=\; p_1\,h_1 + p_2\,h_2 \;=\; p_1 \cdot \frac{p_2^2}{4\,p_1^2} + p_2\Big(\bar{u} - \frac{p_2}{2\,p_1}\Big) \;=\; \frac{p_2^2}{4\,p_1} + p_2\,\bar{u} - \frac{p_2^2}{2\,p_1}.$$

$$\boxed{e(p,\bar{u}) \;=\; p_2\,\bar{u} \;-\; \frac{p_2^2}{4\,p_1}.}$$

Nótese que $e$ es lineal en $\bar{u}$, otra firma de la cuasilinealidad.

(b) (1 pt) Lema de Shephard.

**Respuesta.** Verificamos $h_i(p,\bar{u}) = \partial e(p,\bar{u})/\partial p_i$.

**Bien 1.**

$$\frac{\partial e}{\partial p_1} \;=\; -\,p_2^2 \cdot \frac{\partial}{\partial p_1}\Big(\frac{1}{4\,p_1}\Big) \;=\; -\,p_2^2 \cdot \Big(-\frac{1}{4\,p_1^2}\Big) \;=\; \frac{p_2^2}{4\,p_1^2} \;=\; h_1(p,\bar{u}).\ \checkmark$$

**Bien 2.**

$$\frac{\partial e}{\partial p_2} \;=\; \bar{u} - \frac{2\,p_2}{4\,p_1} \;=\; \bar{u} - \frac{p_2}{2\,p_1} \;=\; h_2(p,\bar{u}).\ \checkmark$$

El lema de Shephard se satisface.

(c) (2 pts) UMP y verificación de las dualidades $v(p, e(p,\bar{u})) = \bar{u}$ y $e(p, v(p,I)) = I$.

**Respuesta. Planteamiento del UMP.**

$$\max_{x_1,x_2\geq 0}\ \sqrt{x_1} + x_2 \quad \text{s.a.} \quad p_1\,x_1 + p_2\,x_2 \;=\; I.$$

**Lagrangiano.**

$$\mathcal{L}(x_1,x_2,\mu) \;=\; \sqrt{x_1} + x_2 - \mu\big(p_1\,x_1 + p_2\,x_2 - I\big).$$

**CPO interiores.**

$$\frac{1}{2\sqrt{x_1}} \;=\; \mu\,p_1, \qquad 1 \;=\; \mu\,p_2 \;\Longrightarrow\; \mu \;=\; \frac{1}{p_2}.$$

**Demanda marshalliana del bien 1.** Sustituyendo $\mu = 1/p_2$ en la primera CPO:

$$\frac{1}{2\sqrt{x_1}} \;=\; \frac{p_1}{p_2} \;\Longrightarrow\; \sqrt{x_1} \;=\; \frac{p_2}{2\,p_1} \;\Longrightarrow\; x_1(p,I) \;=\; \frac{p_2^2}{4\,p_1^2}.$$

**Demanda marshalliana del bien 2.** De la restricción presupuestaria,

$$x_2(p,I) \;=\; \frac{I - p_1\,x_1}{p_2} \;=\; \frac{I}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}\cdot\frac{p_2^2}{4\,p_1^2} \;=\; \frac{I}{p_2} - \frac{p_2}{4\,p_1}.$$

$$\boxed{x_1(p,I) \;=\; \frac{p_2^2}{4\,p_1^2}, \qquad x_2(p,I) \;=\; \frac{I}{p_2} - \frac{p_2}{4\,p_1}.}$$

La solución interior requiere $I \geq p_2^2/(4p_1)$. Observe nuevamente que $x_1$ *no depende* del ingreso: todo aumento de $I$ se traslada íntegramente a $x_2$ (cuasilinealidad).

**Utilidad indirecta.**

$$v(p,I) \;=\; \sqrt{x_1(p,I)} + x_2(p,I) \;=\; \frac{p_2}{2\,p_1} + \frac{I}{p_2} - \frac{p_2}{4\,p_1} \;=\; \frac{I}{p_2} + \frac{p_2}{4\,p_1}.$$

$$\boxed{v(p,I) \;=\; \frac{I}{p_2} + \frac{p_2}{4\,p_1}.}$$

La utilidad indirecta también es lineal en $I$.

**Verificación de la dualidad $v(p,e(p,\bar u)) = \bar u$.** Reemplazando $I$ por $e(p,\bar u) = p_2\,\bar u - p_2^2/(4p_1)$ en $v$:

$$\begin{aligned}
v\big(p,e(p,\bar u)\big) \;&=\; \frac{e(p,\bar u)}{p_2} + \frac{p_2}{4\,p_1} \\
&=\; \frac{p_2\,\bar u - \dfrac{p_2^2}{4\,p_1}}{p_2} + \frac{p_2}{4\,p_1} \\
&=\; \bar u - \frac{p_2}{4\,p_1} + \frac{p_2}{4\,p_1} \;=\; \bar u. \checkmark
\end{aligned}$$

**Verificación de la dualidad $e(p,v(p,I)) = I$.** Reemplazando $\bar u$ por $v(p,I) = I/p_2 + p_2/(4p_1)$ en $e$:

$$\begin{aligned}
e\big(p,v(p,I)\big) \;&=\; p_2\,v(p,I) - \frac{p_2^2}{4\,p_1} \\
&=\; p_2\left(\frac{I}{p_2} + \frac{p_2}{4\,p_1}\right) - \frac{p_2^2}{4\,p_1} \\
&=\; I + \frac{p_2^2}{4\,p_1} - \frac{p_2^2}{4\,p_1} \;=\; I. \checkmark
\end{aligned}$$

**Pregunta 3** (7 puntos). *Variación Compensada y Variación Equivalente.*

Datos: $u(x_1,x_2) = x_1^{2/3}\,x_2^{1/3}$, $I = 1000$, $p_2 = 20$, $p_1^0 = 10$, $p_1^1 = 5$ (el subsidio reduce $p_1$). Denotamos $p^0 = (p_1^0, p_2) = (10, 20)$ y $p^1 = (p_1^1, p_2) = (5, 20)$.

*Nota tipográfica.* El enunciado de (c) escribe "$e(p^0, V^0) = e(p^1, V^1) = w$", pero $w$ no se define en el problema. Por contexto y por las convenciones generales de la PC2, debe leerse $w = I = 1000$ (el ingreso). Resolveremos bajo esa lectura.

(a) (2 pts) Definición formal de VC y VE.

**Respuesta.** Sean $V^0 = v(p^0, I)$ y $V^1 = v(p^1, I)$ las utilidades indirectas antes y después del cambio de precios. Las definiciones formales en términos de la función de gasto son:

$$\boxed{VC \;=\; I - e(p^1, V^0), \qquad VE \;=\; e(p^0, V^1) - I.}$$

**Interpretación.**

- $VC$: a los *precios nuevos* $p^1$, $e(p^1, V^0)$ es el ingreso mínimo que el consumidor necesita para alcanzar la utilidad *original* $V^0$. Como dispone de $I$, la diferencia $VC = I - e(p^1, V^0)$ es la cantidad máxima que se le podría "cobrar" (o que estaría dispuesto a ceder) para acceder al cambio de precios sin caer por debajo de su bienestar inicial.
- $VE$: a los *precios viejos* $p^0$, $e(p^0, V^1)$ es el ingreso que necesitaría para alcanzar la utilidad *final* $V^1$. La diferencia $VE = e(p^0, V^1) - I$ es la transferencia monetaria, evaluada a precios antiguos, que sería equivalente al cambio de precios en términos de bienestar.

**Convención de signos.** Si los precios bajan (mejora del bienestar), $V^1 > V^0$ y ambas medidas son positivas. Si suben (deterioro), ambas son negativas. En ambos casos, $VC$ y $VE$ comparten el mismo signo.

**Formulaciones equivalentes útiles.** Por la dualidad $e(p^0, V^0) = I = e(p^1, V^1)$, las definiciones admiten reescrituras:

$$VC \;=\; e(p^1, V^1) - e(p^1, V^0), \qquad VE \;=\; e(p^0, V^1) - e(p^0, V^0).$$

Es decir, ambas miden la diferencia de gasto entre las dos utilidades $V^0$ y $V^1$, pero $VC$ se evalúa a precios *nuevos* y $VE$ a precios *viejos*.

(b) (2 pts) Cestas óptimas y utilidades indirectas.

**Respuesta.** Para una utilidad Cobb–Douglas $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ con $\alpha + \beta = 1$, las demandas marshallianas son

$$x_1(p, I) \;=\; \frac{\alpha\, I}{p_1}, \qquad x_2(p, I) \;=\; \frac{\beta\, I}{p_2}.$$

En nuestro caso $\alpha = 2/3$, $\beta = 1/3$:

$$x_1(p, I) \;=\; \frac{2\, I}{3\, p_1}, \qquad x_2(p, I) \;=\; \frac{I}{3\, p_2}.$$

**Antes del subsidio** ($p_1^0 = 10$, $p_2 = 20$, $I = 1000$):

$$x_1^0 \;=\; \frac{2(1000)}{3(10)} \;=\; \frac{200}{3}, \qquad x_2^0 \;=\; \frac{1000}{3(20)} \;=\; \frac{50}{3}.$$

$$V^0 \;=\; \left(\frac{200}{3}\right)^{2/3} \left(\frac{50}{3}\right)^{1/3} \;=\; \frac{\left(200^2 \cdot 50\right)^{1/3}}{3} \;=\; \frac{(2\,000\,000)^{1/3}}{3}.$$

Como $2\,000\,000 = 2 \cdot 10^6 = 2 \cdot (100)^3$, tenemos $(2\,000\,000)^{1/3} = 100\sqrt[3]{2}$. Por lo tanto,

$$\boxed{V^0 \;=\; \frac{100\,\sqrt[3]{2}}{3} \;\approx\; 41{,}99.}$$

**Con el subsidio** ($p_1^1 = 5$, $p_2 = 20$, $I = 1000$):

$$x_1^1 \;=\; \frac{2(1000)}{3(5)} \;=\; \frac{400}{3}, \qquad x_2^1 \;=\; \frac{1000}{3(20)} \;=\; \frac{50}{3}.$$

$$V^1 = \left(\frac{400}{3}\right)^{2/3}\left(\frac{50}{3}\right)^{1/3} = \frac{(400^2 \cdot 50)^{1/3}}{3} = \frac{(8\,000\,000)^{1/3}}{3} = \frac{200}{3} \approx 66{,}67.$$

$$\boxed{V^1 = \frac{200}{3}.}$$

**Resumen.**

$$(x_1^0, x_2^0) = \left(\tfrac{200}{3}, \tfrac{50}{3}\right), \quad V^0 = \tfrac{100\sqrt[3]{2}}{3}; \qquad (x_1^1, x_2^1) = \left(\tfrac{400}{3}, \tfrac{50}{3}\right), \quad V^1 = \tfrac{200}{3}.$$

**Comentarios.**

- $x_2^0 = x_2^1$: en preferencias Cobb–Douglas el gasto en cada bien es una proporción fija del ingreso ($\beta I = I/3$); como ni $I$ ni $p_2$ cambian, el consumo del bien 2 es invariante al subsidio.
- $V^1/V^0 = (200/3)/(100\sqrt[3]{2}/3) = 2/\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4} > 1$: Gonzalo está estrictamente mejor con el subsidio. ✓

(c) (1 pt) Función de gasto y verificación de la dualidad $e(p^0, V^0) = e(p^1, V^1) = I$.

**Respuesta. Derivación de las hicksianas** (EMP para Cobb–Douglas con $\alpha = 2/3$, $\beta = 1/3$).

Lagrangiano: $\mathcal{L} = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda\big(\bar{u} - x_1^{2/3}x_2^{1/3}\big)$. Las CPO dan:

$$p_1 = \lambda\cdot\tfrac{2}{3}\,x_1^{-1/3}x_2^{1/3}, \qquad p_2 = \lambda\cdot\tfrac{1}{3}\,x_1^{2/3}x_2^{-2/3}.$$

Tomando el cociente:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{2x_2}{x_1} \implies x_2 = \frac{p_1\,x_1}{2\,p_2}.$$

Sustituyendo en $x_1^{2/3}x_2^{1/3} = \bar{u}$:

$$x_1^{2/3}\left(\frac{p_1\,x_1}{2\,p_2}\right)^{1/3} = \bar{u} \implies x_1\left(\frac{p_1}{2\,p_2}\right)^{1/3} = \bar{u} \implies h_1(p,\bar{u}) = \bar{u}\left(\frac{2\,p_2}{p_1}\right)^{1/3}.$$

Por sustitución,

$$h_2(p,\bar{u}) = \frac{p_1}{2\,p_2}\cdot h_1(p,\bar{u}) = \bar{u}\left(\frac{p_1}{2\,p_2}\right)^{2/3}.$$

**Función de gasto.**

$$e(p,\bar{u}) = p_1\,h_1 + p_2\,h_2 = \bar{u}\,p_1^{2/3}p_2^{1/3}\big(2^{1/3} + 2^{-2/3}\big).$$

Notamos que $2^{1/3} + 2^{-2/3} = 2^{-2/3}(2+1) = 3\cdot 2^{-2/3} = 3/\sqrt[3]{4}$, de modo que

$$\boxed{e(p,\bar{u}) = \frac{3\,\bar{u}\,p_1^{2/3}\,p_2^{1/3}}{\sqrt[3]{4}}.}$$

**Especialización con $p_2 = 20$.** Como $20^{1/3}/\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{20/4} = \sqrt[3]{5}$,

$$\boxed{e(p_1, 20, \bar{u}) \;=\; 3\,\bar{u}\,\sqrt[3]{5}\,p_1^{2/3}.}$$

**Verificación de la dualidad $e(p^0, V^0) = e(p^1, V^1) = I$.**
A precios viejos $p^0 = (10, 20)$ y $V^0 = 100\sqrt[3]{2}/3$:

$$\begin{aligned} e(p^0, V^0) \;&=\; 3\cdot\frac{100\sqrt[3]{2}}{3}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot 10^{2/3} \;=\; 100\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot 10^{2/3} \\ &=\; 100\cdot 10^{1/3}\cdot 10^{2/3} \;=\; 100\cdot 10 \;=\; 1000 \;=\; I.\ \checkmark \end{aligned}$$

(Usamos $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{10} = 10^{1/3}$.)
A precios nuevos $p^1 = (5, 20)$ y $V^1 = 200/3$:

$$e(p^1, V^1) \;=\; 3\cdot\frac{200}{3}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot 5^{2/3} \;=\; 200\cdot 5^{1/3}\cdot 5^{2/3} \;=\; 200\cdot 5 \;=\; 1000 \;=\; I.\ \checkmark$$

(d) (3 pts) Cálculo de VC y VE e interpretación.

**Respuesta. Paso 1: gastos hipotéticos cruzados.**
$e(p^1, V^0)$: gasto mínimo a precios nuevos para alcanzar la utilidad vieja.

$$e(p^1, V^0) \;=\; 3\cdot\frac{100\sqrt[3]{2}}{3}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot 5^{2/3} \;=\; 100\sqrt[3]{2}\cdot 5^{1/3}\cdot 5^{2/3} \;=\; 100\sqrt[3]{2}\cdot 5 \;=\; 500\sqrt[3]{2} \;\approx\; 629{,}96.$$

$e(p^0, V^1)$: gasto mínimo a precios viejos para alcanzar la utilidad nueva.

$$e(p^0, V^1) \;=\; 3\cdot\frac{200}{3}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot 10^{2/3} \;=\; 200\cdot 5^{1/3}\cdot 10^{2/3}.$$

Como $10^{2/3} = 2^{2/3}\cdot 5^{2/3}$,

$$e(p^0, V^1) \;=\; 200\cdot 5^{1/3}\cdot 2^{2/3}\cdot 5^{2/3} \;=\; 200\cdot 2^{2/3}\cdot 5 \;=\; 1000\,\sqrt[3]{4} \;\approx\; 1587{,}40.$$

**Paso 2: VC y VE.**

$$\boxed{VC \;=\; I - e(p^1, V^0) \;=\; 1000 - 500\sqrt[3]{2} \;=\; 500\big(2 - \sqrt[3]{2}\big) \;\approx\; 370{,}04 \text{ soles.}}$$

$$\boxed{VE \;=\; e(p^0, V^1) - I \;=\; 1000\sqrt[3]{4} - 1000 \;=\; 1000\big(\sqrt[3]{4} - 1\big) \;\approx\; 587{,}40 \text{ soles.}}$$

Ambas son positivas, consistente con que el subsidio mejora el bienestar de Gonzalo.

**(i) Disposición máxima a pagar por el subsidio: $VC \approx 370{,}04$ soles.**
A los nuevos precios ($p_1^1 = 5$), Gonzalo sólo necesita gastar $e(p^1, V^0) = 500\sqrt[3]{2} \approx 629{,}96$ soles para alcanzar su utilidad original $V^0$. Por lo tanto, podría "ceder" hasta $1000 - 500\sqrt[3]{2} \approx 370{,}04$ soles (por ejemplo, como tarifa semanal de acceso al programa)

y aun así quedar tan bien como antes del subsidio. Si la universidad cobrara una cuota mayor a $\approx 370$ soles, Gonzalo preferiría no participar.

**(ii) Transferencia monetaria equivalente:** $VE \approx 587{,}40$ **soles.**
A los precios antiguos ($p_1^0 = 10$), para que Gonzalo alcance la utilidad $V^1$ que el subsidio le induce, necesita un gasto total de $e(p^0, V^1) = 1000\sqrt[3]{4} \approx 1587{,}40$ soles. Como ya cuenta con $I = 1000$, hace falta una transferencia adicional de $\approx 587{,}40$ soles. Es decir, regalarle aproximadamente 587 soles a precios viejos le produce el mismo bienestar que el subsidio.

*Comentario.* Note que $VE > VC$ ($587{,}40 > 370{,}04$): para un bien normal ante una baja de precio, siempre se cumple $VE > VC$. Más aún, por la pregunta 4 (preferencias homotéticas, que es justamente el caso Cobb–Douglas), $VC/VE = V^0/V^1 = 1/\sqrt[3]{4} \approx 0{,}630$; en efecto, $370{,}04/587{,}40 \approx 0{,}630$. ✓

**Pregunta 4** (3 puntos). *Preferencias homotéticas y bienestar.*

Función de gasto: $e(p, \bar{u}) = \bar{u} \cdot c(p)$, con $c(p) > 0$ que depende solo de los precios. Cambio de precios $p_1^0 \to p_1^1$ con $p_2$ y $I$ fijos. Denotamos $V^0 = v(p_1^0, p_2, I)$ y $V^1 = v(p_1^1, p_2, I)$, y $p^0 = (p_1^0, p_2)$, $p^1 = (p_1^1, p_2)$.

*Observación.* La forma $e(p, \bar{u}) = \bar{u} \cdot c(p)$ caracteriza preferencias *homotéticas*: la utilidad puede normalizarse de modo que $e$ sea lineal en $\bar{u}$. La utilidad Cobb–Douglas de la pregunta 3 es un caso particular.

(a) (1.5 pts) Mostrar que $VC/VE = V^0/V^1$.

**Respuesta. Paso 1: relación fundamental de la dualidad.** Por definición de $V^0$ y $V^1$:

$$e(p^0, V^0) \;=\; I \;=\; e(p^1, V^1).$$

Bajo homoteticidad $e(p, \bar{u}) = \bar{u}\, c(p)$, esto se traduce en

$$V^0\, c(p^0) \;=\; I \;=\; V^1\, c(p^1). \qquad (\star)$$

De $(\star)$ extraemos:

$$c(p^0) \;=\; \frac{I}{V^0}, \qquad c(p^1) \;=\; \frac{I}{V^1}.$$

**Paso 2: cálculo de VC.**

$$VC \;=\; I - e(p^1, V^0) \;=\; I - V^0\, c(p^1) \;=\; I - V^0 \cdot \frac{I}{V^1} \;=\; I\left(1 - \frac{V^0}{V^1}\right) \;=\; I \cdot \frac{V^1 - V^0}{V^1}. \quad (1)$$

**Paso 3: cálculo de VE.**

$$VE \;=\; e(p^0, V^1) - I \;=\; V^1\, c(p^0) - I \;=\; V^1 \cdot \frac{I}{V^0} - I \;=\; I\left(\frac{V^1}{V^0} - 1\right) \;=\; I \cdot \frac{V^1 - V^0}{V^0}. \quad (2)$$

**Paso 4: cociente.** Dividiendo (1) entre (2):

$$\frac{VC}{VE} = \frac{I\,(V^1 - V^0)/V^1}{I\,(V^1 - V^0)/V^0} = \frac{V^0}{V^1}.$$

$$\boxed{\frac{VC}{VE} = \frac{V^0}{V^1}.}$$

**Consecuencia.**

- Si el precio sube, $V^1 < V^0$, luego $V^0/V^1 > 1$. Como $VC$ y $VE$ son ambas negativas, $|VC| > |VE|$.
- Si el precio baja, $V^1 > V^0$, luego $V^0/V^1 < 1$ y $|VC| < |VE|$ (consistente con el resultado numérico de la pregunta 3, donde $VC \approx 370 < VE \approx 587$).

(b) (1.5 pts) Probar que $VE = -\int_{p_1^0}^{p_1^1} h_1(t, p_2, V^1)\, dt$.

**Respuesta.** *Nota tipográfica.* El enunciado escribe los límites como "$\int_{p_0^1}^{p_1^1}$", con subíndice y superíndice intercambiados en el límite inferior. La lectura correcta es límite inferior $p_1^0$ (precio inicial del bien 1) y límite superior $p_1^1$ (precio final del bien 1).

**Paso 1: lema de Shephard.** Para todo $\bar{u}$ y todo $t > 0$ (con $p_2$ fijo),

$$\frac{\partial}{\partial t} e(t, p_2, \bar{u}) = h_1(t, p_2, \bar{u}).$$

**Paso 2: teorema fundamental del cálculo.** Aplicado a la función $t \mapsto e(t, p_2, V^1)$ entre $t = p_1^0$ y $t = p_1^1$:

$$e(p_1^1, p_2, V^1) - e(p_1^0, p_2, V^1) = \int_{p_1^0}^{p_1^1} \frac{\partial e(t, p_2, V^1)}{\partial t}\, dt = \int_{p_1^0}^{p_1^1} h_1(t, p_2, V^1)\, dt. \tag{3}$$

**Paso 3: usar dualidad.** Por definición, $e(p^1, V^1) = I$, es decir $e(p_1^1, p_2, V^1) = I$. Sustituyendo en (3):

$$I - e(p_1^0, p_2, V^1) = \int_{p_1^0}^{p_1^1} h_1(t, p_2, V^1)\, dt.$$

Despejando $e(p_1^0, p_2, V^1) - I$ (que es exactamente $VE$):

$$VE = e(p^0, V^1) - I = -\int_{p_1^0}^{p_1^1} h_1(t, p_2, V^1)\, dt.$$

$$\boxed{VE = -\int_{p_1^0}^{p_1^1} h_1(t, p_2, V^1)\, dt.}$$

**Lectura económica.** La $VE$ es (menos) el área bajo la curva de demanda hicksiana del bien 1, evaluada al *nivel de utilidad final* $V^1$, en el rango de precios $[p_1^1, p_1^0]$ (cuando el precio baja). De manera análoga, puede mostrarse que

$$VC = -\int_{p_1^0}^{p_1^1} h_1(t, p_2, V^0)\, dt,$$

es decir, la $VC$ es la misma integral pero a nivel de utilidad *inicial* $V^0$. La diferencia entre $VC$ y $VE$ proviene precisamente del nivel de utilidad al que se evalúa la curva hicksiana.

*Observación (no exigida).* Bajo homoteticidad, este resultado es consistente con la parte (a). En efecto, las hicksianas son lineales en $\bar{u}$ (porque $h_i = \partial e/\partial p_i = \bar{u} \cdot \partial c/\partial p_i$), de modo que

$$\frac{\int_{p_1^0}^{p_1^1} h_1(t, p_2, V^0)\, dt}{\int_{p_1^0}^{p_1^1} h_1(t, p_2, V^1)\, dt} = \frac{V^0}{V^1},$$

y por lo tanto $VC/VE = V^0/V^1$, recuperando (a).