

Facultad de Ciencias Sociales

Especialidad de Economía

Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)

Ciclo 2026-1

Microeconomía 1

Práctica Calificada 1 — Recuperación, Solucionario

Profesor: José Gallardo Ku **Jefes de práctica:** Marcelo Gallardo, Raúl Amao

Pregunta 1 (5 puntos). *Preferencias y funciones de utilidad.*

(a) (2 pts)

Respuesta. (i) ¿Representan $u(x, y) = x^2 + y^2$ y $v(x, y) = -(x^2 + y^2)$ las mismas preferencias?

No. Si existiera f estrictamente creciente con $v = f(u)$, entonces $f(t) = -t$ para todo t en el rango de u . Pero $f(t) = -t$ es estrictamente *decreciente*, no creciente. Por lo tanto no puede ser una transformación monótona creciente.

La interpretación económica lo confirma: u asigna mayor utilidad a las canastas más alejadas del origen (prefiere más), mientras que v asigna mayor utilidad a las más cercanas al origen (prefiere menos). Tienen curvas de indiferencia idénticas (círculos) pero el *orden* de preferencia es opuesto: $v = -u$ es una transformación monótona *decreciente*. Las preferencias son distintas. \square

(ii) ¿Representan $u(x, y) = x^2 + y^2$ y $w(x, y) = e^{x^2+y^2}$ las mismas preferencias?

Sí. Observamos que

$$w(x, y) = e^{x^2+y^2} = e^{u(x,y)} = f(u(x, y)), \quad \text{donde } f(t) = e^t.$$

La función $f(t) = e^t$ es estrictamente creciente para todo $t \in \mathbb{R}$, y $u(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0$ en el dominio. Por el teorema de invarianza ordinal, $w = f \circ u$ representa las mismas preferencias que u : dos canastas se ordenan de la misma manera bajo u y bajo w . \square

(b) (2 pts)

Respuesta. Consumidor I — ¿Qué propiedad especial? ¿Son monótonas?

Las curvas de indiferencia son círculos concéntricos alrededor de un punto interior (el “bliss point” o punto de saciedad). Esta propiedad se denomina **saciedad local**: existe una canasta óptima absoluta, y alejarse de ella en cualquier dirección reduce la utilidad. La curva I_3 (la más cercana al punto de saciedad) representa mayor utilidad que I_2 , que a su vez es preferida a I_1 .

Las preferencias **no son monótonas**. La monotonía requiere que más de cualquier bien (sin reducir otros) sea siempre mejor. Aquí, si el consumidor está en el punto de saciedad, aumentar el consumo de cualquier bien lo mueve a una curva de menor utilidad. \square

Consumidor II — ¿Son monótonas? ¿Qué tipo de bien es x_2 ?

Las preferencias **no son monótonas globalmente**. Aumentar x_2 manteniendo x_1 fijo desplaza al consumidor a una curva de *menor* utilidad (las curvas $I_1 \prec I_2 \prec I_3$ se ordenan de abajo hacia arriba, y la preferencia apunta hacia abajo-derecha). Sin embargo, aumentar x_1 fijando x_2 sí mejora el bienestar.

El bien x_2 es un **mal** (*bad*): el consumidor lo rechaza y prefiere consumir menos de él. Las curvas de indiferencia tienen pendiente *positiva* porque para compensar una unidad adicional del mal x_2 (que reduce utilidad), el consumidor debe recibir más del bien x_1 (que la aumenta). \square

(c) (1 pt)

Respuesta. La condición de óptimo es $x_1 = 3x_2$ (codo de la curva de indiferencia). Sustituyendo en $p_1x_1 + p_2x_2 = w$:

$$3p_1x_2 + p_2x_2 = (3p_1 + p_2)x_2 = w \implies \boxed{x_2^*(p, w) = \frac{w}{3p_1 + p_2}, \quad x_1^*(p, w) = \frac{3w}{3p_1 + p_2}.}$$

Evaluación en $p_1 = 3$, $p_2 = 1$, $w = 12$:

$$x_2^* = \frac{12}{10} = 1,2, \quad x_1^* = \frac{36}{10} = 3,6.$$

Verificación: $3 \cdot 3,6 + 1 \cdot 1,2 = 10,8 + 1,2 = 12 = w$. \checkmark El gasto agota el ingreso. \square

Pregunta 2 (6 puntos). *Maximización de utilidad (CES), análisis gráfico y comparación de canastas.*

$$u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2}, \quad p_1, p_2 > 0, \quad w > 0.$$

(a) (3 pts)

Respuesta. Las preferencias son monótonas ($\partial u / \partial x_k > 0$) y la solución es interior. Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2} - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - w).$$

CPO:

$$\frac{1}{2\sqrt{x_1}} = \lambda p_1, \quad \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \lambda p_2.$$

Despejando:

$$\sqrt{x_1} = \frac{1}{2\lambda p_1}, \quad \sqrt{x_2} = \frac{1}{\lambda p_2} \implies x_1 = \frac{1}{4\lambda^2 p_1^2}, \quad x_2 = \frac{1}{\lambda^2 p_2^2}.$$

Sustituyendo en la restricción activa:

$$\frac{p_1}{4\lambda^2 p_1^2} + \frac{p_2}{\lambda^2 p_2^2} = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{1}{4p_1} + \frac{1}{p_2} \right) = w.$$

Definamos $D \equiv \frac{1}{4p_1} + \frac{1}{p_2}$. Entonces $\lambda^{*2} = \frac{D}{w}$, y:

$$x_1^*(p, w) = \frac{w}{4p_1^2 D}, \quad x_2^*(p, w) = \frac{w}{p_2^2 D}, \quad D = \frac{1}{4p_1} + \frac{1}{p_2}.$$

Evaluación en $p_1 = 1, p_2 = 4, w = 20$: $D = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

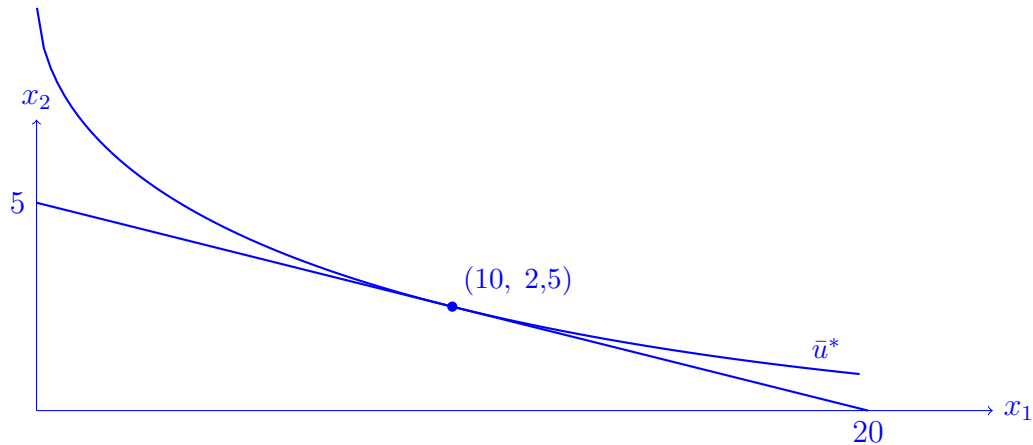
$$x_1^* = \frac{20}{4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}} = 10, \quad x_2^* = \frac{20}{16 \cdot \frac{1}{2}} = 2,5.$$

$$x_1^* = 10, \quad x_2^* = 2,5.$$

Verificación: $1 \cdot 10 + 4 \cdot 2,5 = 20 = w$. ✓

(b) (1 pt)

Respuesta. Restricción: $x_1 + 4x_2 = 20$; interceptos $(20, 0)$ y $(0, 5)$.



El punto óptimo $(10; 2,5)$ es la tangencia entre la recta presupuestaria y la curva de indiferencia de mayor nivel alcanzable.

(c) (2 pts)

Respuesta. (i) **Factibilidad** ($p_1x_1 + p_2x_2 \leq w$, es decir $x_1 + 4x_2 \leq 20$):

Canasta	x_1	x_2	Costo	¿Factible?
A	6	2	$6 + 8 = 14 \leq 20$	Sí
B	4	3	$4 + 12 = 16 \leq 20$	Sí
C	8	4	$8 + 16 = 24 > 20$	No

(ii) **Utilidades:**

$$u(A) = \sqrt{6} + 2\sqrt{2} \approx 2,449 + 2,828 = 5,277.$$

$$u(B) = \sqrt{4} + 2\sqrt{3} = 2 + 2 \cdot 1,732 = 5,464.$$

Orden: $B \succ A$.

(iii) $u^* = \sqrt{10} + 2\sqrt{2,5} \approx 3,162 + 3,162 = 6,324$.

$$u^* \approx 6,32 > u(B) \approx 5,46 > u(A) \approx 5,28.$$

Ninguna canasta factible es óptima. C no es factible; B no gasta todo el ingreso y aun así queda por debajo del óptimo. \square

Pregunta 3 (5 puntos). *Restricción presupuestaria con precios por tramos.*

$w = 30$, $p_2 = 3$, $p_1 = 2$ para $x_1 \leq 6$, $p'_1 = 1$ para $x_1 > 6$.

(a) (2 pts)

Respuesta. El costo total es:

$$C(x_1, x_2) = \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & \text{si } x_1 \leq 6, \\ 2 \cdot 6 + 1 \cdot (x_1 - 6) + 3x_2 = x_1 + 6 + 3x_2 & \text{si } x_1 > 6. \end{cases}$$

Igualando a $w = 30$, la restricción presupuestaria es:

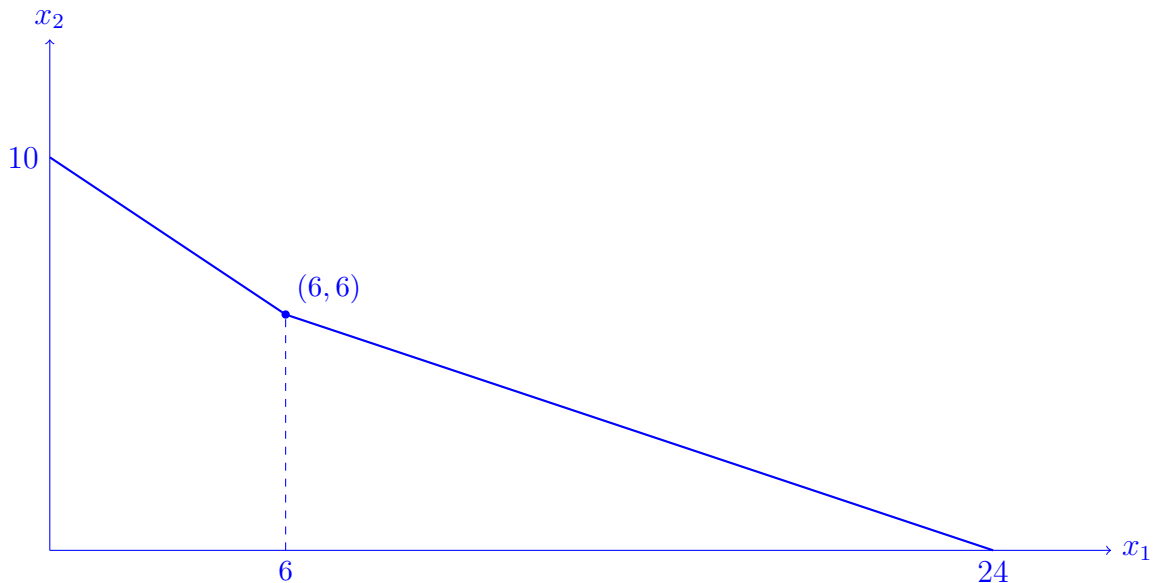
Tramo 1 ($x_1 \leq 6$): $2x_1 + 3x_2 = 30$, es decir $x_2 = 10 - \frac{2}{3}x_1$.

Intercepto en x_2 : $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 10$. Extremo del tramo: $x_1 = 6 \Rightarrow x_2 = 6$.

Tramo 2 ($x_1 > 6$): $x_1 + 3x_2 = 24$, es decir $x_2 = 8 - \frac{1}{3}x_1$.

Extremo izquierdo (punto de quiebre): $x_1 = 6 \Rightarrow x_2 = 6$. Intercepto en x_1 : $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 24$.

El **punto de quiebre** es $(6, 6)$.



(b) (1 pt)

Respuesta. La pendiente de la restricción presupuestaria es $-p_1/p_2$:

- Tramo 1: $-2/3$.
- Tramo 2: $-1/3$.

La pendiente cambia porque el precio efectivo del bien 1 cae de 2 a 1 a partir de la séptima unidad: el bien 1 se abarata marginalmente, por lo que el consumidor debe sacrificar menos x_2 por unidad adicional de x_1 , haciendo la recta más plana.

El conjunto presupuestario **no es convexo**. Para verlo, tomemos dos puntos factibles sobre la frontera: $P = (0, 10)$ (en el tramo 1) y $Q = (24, 0)$ (en el tramo 2). Su punto medio es $M = (12, 5)$. El costo real de M es $12 + 1 \cdot 6 + 3 \cdot 5 = 33 > 30$, de modo que M **no** pertenece al conjunto presupuestario. Al existir dos puntos factibles cuya combinación convexa no es factible, el conjunto no es convexo. La frontera tiene un quiebre hacia *adentro* en $(6, 6)$: la segunda recta es más plana, lo que genera una “concauidad” en la frontera que hace que el interior del conjunto sea no convexo. \square

(c) (2 pts)

Respuesta. Calculamos el costo real de cada canasta según la estructura de precios por tramos:

Canasta	x_1	x_2	Tramo	Costo real	¿Factible?
A	3	8	$x_1 \leq 6$	$2 \cdot 3 + 3 \cdot 8 = 6 + 24 = 30$	Sí, sobre la frontera
B	9	5	$x_1 > 6$	$12 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 12 + 3 + 15 = 30$	Sí, sobre la frontera
C	12	4	$x_1 > 6$	$12 + 1 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 12 + 6 + 12 = 30$	Sí, sobre la frontera
D	15	3	$x_1 > 6$	$12 + 1 \cdot 9 + 3 \cdot 3 = 12 + 9 + 9 = 30$	Sí, sobre la frontera

Todas las canastas son factibles y además están exactamente sobre la frontera presupuestaria (costo = $w = 30$). \square

Pregunta 4 (4 puntos). *Maximización con N bienes.*

$$u(x_1, \dots, x_N) = \sum_{k=1}^N \beta_k \ln x_k, \beta_k > 0, p_k > 0, w > 0.$$

(a) (1 pt)

Respuesta. Monotonía. Sí. $\partial u / \partial x_k = \beta_k / x_k > 0$ para todo k (pues $\beta_k > 0$ y $x_k > 0$). Aumentar cualquier bien estrictamente incrementa la utilidad: las preferencias son estrictamente monótonas.

Solución interior. La solución es interior ($x_k^* > 0$ para todo k). Si alguna coordenada fuera cero, la utilidad sería $-\infty$ (pues $\lim_{x_k \rightarrow 0^+} \ln x_k = -\infty$), mientras que cualquier canasta con todas las coordenadas positivas tiene utilidad finita. Luego consumir cero unidades de algún bien no puede ser óptimo, y usamos Lagrange con la restricción activa. \square

(b) (2 pts)

Respuesta. Lagrangiano: $\mathcal{L} = \sum_k \beta_k \ln x_k - \lambda(\sum_k p_k x_k - w)$.

CPO para cada k :

$$\frac{\beta_k}{x_k} = \lambda p_k \implies p_k x_k = \frac{\beta_k}{\lambda}. \quad (\text{CPO}_k)$$

Sea $B \equiv \sum_{k=1}^N \beta_k$. Sumando todas las CPO y usando $\sum_k p_k x_k = w$:

$$\sum_k p_k x_k = \frac{B}{\lambda} = w \implies \lambda^* = \frac{B}{w}.$$

Sustituyendo en (CPO_k):

$$x_k^*(p, w) = \frac{\beta_k}{B} \cdot \frac{w}{p_k}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Cada bien absorbe la fracción constante β_k/B del ingreso (propiedad Cobb-Douglas generalizada). \square

(c) (1 pt)

Respuesta. Sí, \tilde{u} representa las mismas preferencias que u :

$$\tilde{u}(x) = (g \circ f \circ u)(x) = g(f(x)) = h(x).$$

donde $g = \sqrt{\cdot}$ y $f = e^{(\cdot)}$. Como f y g son estrictamente creciente, $g \circ f = h$ también. Por lo tanto, las demandas marshallianas óptimas son **idénticas** a las de (b):

$$x_k^*(p, w) = \frac{\beta_k}{B} \cdot \frac{w}{p_k}, \quad k = 1, \dots, N, \quad B = \sum_{j=1}^N \beta_j.$$

No es necesario optimizar \tilde{u} directamente; basta reconocer la equivalencia: si las preferencias son las mismas (módulo transformación estrictamente creciente), entonces las demandas marshallianas son las mismas (PD1-2). \square