

Facultad de Ciencias Sociales  
Especialidad de Economía  
Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)  
Ciclo 2026-1

## Microeconomía 1

### Práctica Calificada 1 — Solucionario

**Profesor:** José Gallardo Ku    **Jefes de práctica:** Marcelo Gallardo, Raúl Amao

---

**Pregunta 1** (5 puntos). *Preferencias y funciones de utilidad.*

(a) (1 pt)

**Respuesta.** Sí. Observemos que

$$v(x, y) = 2 \ln x + \ln y = \ln(x^2) + \ln y = \ln(x^2 y) = \ln(u(x, y)).$$

La función  $f(t) = \ln t$  es estrictamente creciente para  $t > 0$ , y  $u(x, y) = x^2 y > 0$  en el dominio relevante. Por lo tanto  $v = f \circ u$  es una transformación monótona creciente de  $u$  y, por el teorema de invarianza ordinal, representa las mismas preferencias.  $\square$

(b) (2 pts)

**Respuesta. Consumidor I — ¿Son convexas las preferencias?**

Sí. Las preferencias son *convexas* si el contorno superior es un conjunto convexo para cada curva de indiferencia. En el gráfico, la curva es la hipérbola  $x_2 = 1/x_1$  (convexa al origen) y la región sombreada por encima satisface esa propiedad: dados dos puntos cualesquiera en esa región, el segmento que los une también está en ella. Formalmente, esto equivale a que  $u = x_1 x_2$  sea cuasicóncava.  $\square$

**Consumidor II — ¿Son monótonas las preferencias?**

No. La monotonía exige que si  $y \geq x$  con  $y \neq x$ , entonces  $y \succsim x$  (más es al menos tan bueno). Aquí la utilidad *crece* al acercarse al origen, de modo que tener más de ambos bienes *reduce* la utilidad. Por ejemplo, si  $x = (1, 0)$  e  $y = (2, 0)$ , entonces  $y > x$ , pero  $y$  está más lejos del origen, así que  $x \succ y$ . Esto viola la monotonía.  $\square$

(c) (1 pt)

**Respuesta.** Las curvas de indiferencia son rectas de pendiente  $-1$ . Como  $p_1 < p_2$  la restricción presupuestaria es más plana ( $-p_1/p_2 > -1$ ). El consumidor gasta todo el ingreso en el bien más barato:

$$\boxed{x^*(p, w) = \frac{w}{p_1}, \quad y^*(p, w) = 0.}$$

Si  $p_1 = p_2$ , las pendientes coinciden y cualquier combinación con  $p_1 x + p_2 y = w$ ,  $x, y \geq 0$  es óptima: la demanda es indeterminada.  $\square$

(d) (1 pt)

**Respuesta.** La afirmación contiene dos ideas: (i) el pan siempre se consume *junto* con un acompañamiento (complementariedad), y (ii) mermelada y mantequilla son *sustitutos perfectos*. Proponemos:

$$u(x_1, x_2, x_3) = \min\{x_1, x_2 + x_3\}.$$

El min captura que pan y acompañamiento deben consumirse en proporciones fijas. La suma  $x_2 + x_3$  captura que mermelada y mantequilla son intercambiables.  $\square$

**Pregunta 2** (8 puntos). *Maximización de utilidad, análisis gráfico y comparación de canastas.*

$$u(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^{1/3}(x_2 - 1)^{2/3}, \quad x_1 > 2, \quad x_2 > 1, \quad \text{precios } p_1, p_2 > 0, \quad w > 2p_1 + p_2.$$

(a) (3 pts)

**Respuesta.** Con el cambio de variables  $\hat{x}_1 = x_1 - 2$ ,  $\hat{x}_2 = x_2 - 1$  el problema se convierte en Cobb-Douglas con ingreso discrecional  $\hat{w} = w - 2p_1 - p_2$ :

$$\max \hat{x}_1^{1/3} \hat{x}_2^{2/3} \quad \text{s.a.} \quad p_1 \hat{x}_1 + p_2 \hat{x}_2 = \hat{w}.$$

Aplicando la fórmula Cobb-Douglas ( $b_1 = 1/3$ ,  $b_2 = 2/3$ ):

$$\hat{x}_1^* = \frac{\hat{w}}{3p_1}, \quad \hat{x}_2^* = \frac{2\hat{w}}{3p_2}.$$

Las **demandas marshallianas** son:

$$x_1^*(p, w) = 2 + \frac{w - 2p_1 - p_2}{3p_1}, \quad x_2^*(p, w) = 1 + \frac{2(w - 2p_1 - p_2)}{3p_2}.$$

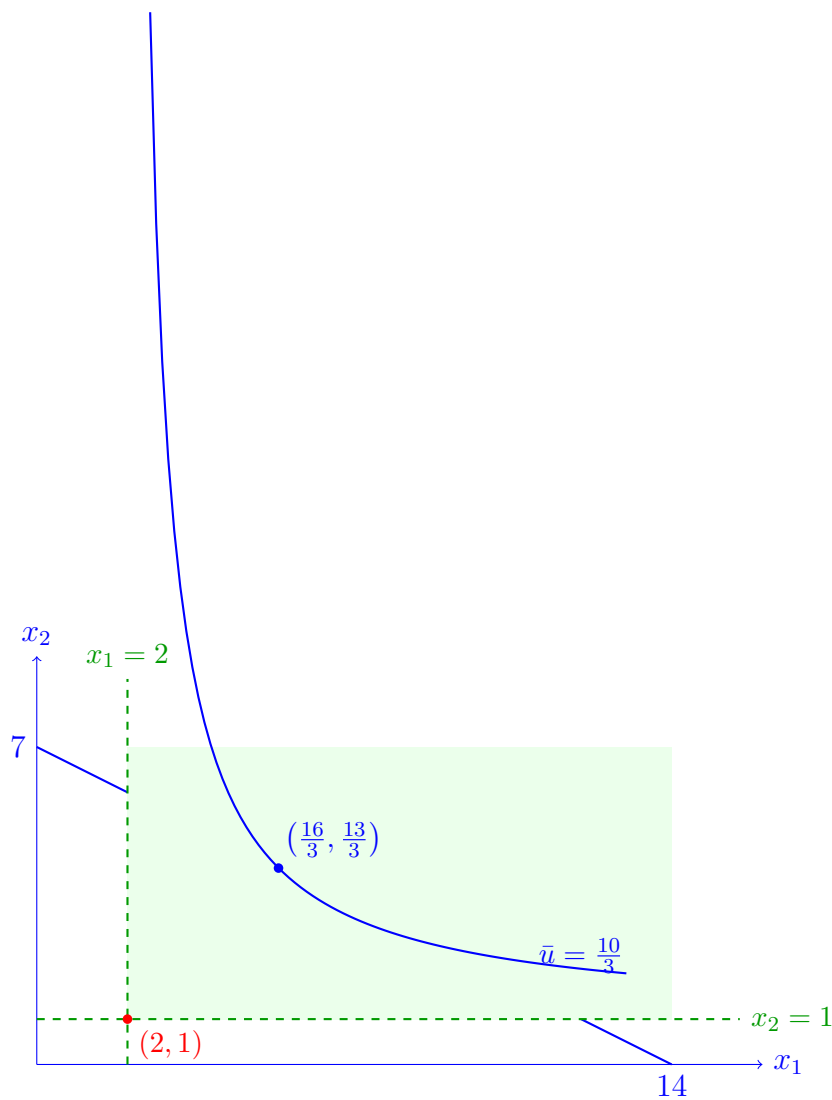
**Evaluación** en  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 2$ ,  $w = 14$ :  $\hat{w} = 10$ .

$$x_1^* = 2 + \frac{10}{3} = \frac{16}{3} \approx 5,33, \quad x_2^* = 1 + \frac{10}{3} = \frac{13}{3} \approx 4,33.$$

Verificación:  $\frac{16}{3} + 2 \cdot \frac{13}{3} = \frac{42}{3} = 14 = w$ .  $\checkmark$

(b) (2 pts)

**Respuesta.** Restricción presupuestaria  $x_1 + 2x_2 = 14$ ; intersecciones: (14, 0) y (0, 7).



El punto de subsistencia  $(2, 1)$  (rojo) define el origen del problema. El óptimo  $(\frac{16}{3}, \frac{13}{3})$  (azul) es la tangencia entre la recta presupuestaria y la curva de indiferencia  $\bar{u} = 10/3$ . La región verde es donde  $u$  está definida ( $x_1 > 2, x_2 > 1$ ).

(c) (3 pts)

**Respuesta.** Con  $p_1 = 1, p_2 = 2, w = 14$ :

(i) **Factibilidad.** Calculamos el costo  $p_1x_1 + p_2x_2$  de cada canasta:

Canasta	$x_1$	$x_2$	Costo	¿Factible?
A	3	4	$3 + 8 = 11 \leq 14$	Sí
B	4	5	$4 + 10 = 14 \leq 14$	Sí (sobre la recta)
C	7	5	$7 + 10 = 17 > 14$	No

La canasta  $C$  no es factible: el consumidor no puede adquirirla con su ingreso.

(ii) Utilidades de las canastas factibles.

$$u(A) = (3 - 2)^{1/3}(4 - 1)^{2/3} = 1^{1/3} \cdot 3^{2/3} = 3^{2/3} \approx 2,08.$$

$$u(B) = (4 - 2)^{1/3}(5 - 1)^{2/3} = 2^{1/3} \cdot 4^{2/3} = 2^{1/3} \cdot 2^{4/3} = 2^{5/3} \approx 3,17.$$

Orden:  $u(B) > u(A)$ , es decir  $B \succ A$ .

(iii) **Comparación con el óptimo.** La canasta óptima hallada en (a) es  $x^* = (\frac{16}{3}, \frac{13}{3})$  con  $u^* = \frac{10}{3} \approx 3,33$ . Comparando:

$$u^* = \frac{10}{3} \approx 3,33 > u(B) \approx 3,17 > u(A) \approx 2,08.$$

Ninguna de las canastas factibles es óptima.  $B$  está sobre la recta presupuestaria pero no es la mejor elección posible: el consumidor puede alcanzar  $u^* > u(B)$  eligiendo  $(\frac{16}{3}, \frac{13}{3})$ .  $A$  ni siquiera agota el ingreso disponible.  $\square$

**Pregunta 3** (4 puntos). 3 bienes.

$u(x_A, x_B, x_C) = x_A^\alpha x_B^\beta x_C^\gamma$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$ , precios  $p_A, p_B, p_C > 0$ ,  $w > 0$ .

(a) (1 pt)

**Respuesta. Monotonía.** Sí. Como  $\alpha, \beta, \gamma > 0$ , las derivadas parciales son todas positivas:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\alpha_i u}{x_i} > 0, \quad i \in \{A, B, C\}.$$

Por lo tanto, aumentar cualquier bien (sin reducir los demás) siempre aumenta la utilidad:  $y \geq x$ ,  $y \neq x \Rightarrow u(y) > u(x)$ . Las preferencias son monótonas.  $\square$

**Solución interior.** La solución es **interior**, es decir,  $x_A^*, x_B^*, x_C^* > 0$ . Si alguna coordenada fuera cero, por ejemplo  $x_A^* = 0$ , entonces  $u = 0$ . Pero cualquier canasta con  $x_A > 0$  (aunque sea pequeño) tiene  $u > 0$ , y si se financia reduciendo otro bien en la misma cantidad de gasto, sigue siendo factible. Luego  $x_A^* = 0$  no puede ser óptimo. El mismo argumento aplica para  $x_B^*$  y  $x_C^*$ .

Al ser la solución interior y las preferencias monótonas (la restricción presupuestaria se agota en el óptimo), podemos aplicar directamente el método de Lagrange con la restricción activa.  $\square$

(b) (1 pt)

**Respuesta.** Sí. Observemos que

$$\tilde{u} = \alpha \ln x_A + \beta \ln x_B + \gamma \ln x_C = \ln(x_A^\alpha x_B^\beta x_C^\gamma) = \ln(u).$$

La función  $f(t) = \ln t$  es estrictamente creciente para  $t > 0$ , así que  $\tilde{u} = f \circ u$  es una transformación monótona creciente de  $u$ . Por el teorema de invarianza ordinal,  $\tilde{u}$  representa las mismas preferencias y produce idénticas demandas.  $\square$

(c) (2 pts)

**Respuesta.** Usamos  $\tilde{u} = \alpha \ln x_A + \beta \ln x_B + \gamma \ln x_C$ . El lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \alpha \ln x_A + \beta \ln x_B + \gamma \ln x_C - \lambda(p_A x_A + p_B x_B + p_C x_C - w).$$

Las CPO son:

$$\frac{\alpha}{x_A} = \lambda p_A, \quad \frac{\beta}{x_B} = \lambda p_B, \quad \frac{\gamma}{x_C} = \lambda p_C.$$

De cada una:  $p_i x_i = \alpha_i / \lambda$  (con  $\alpha_A = \alpha$ , etc.). Sumando y usando  $p_A x_A + p_B x_B + p_C x_C = w$ :

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{\lambda} = w \implies \lambda^* = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{w}.$$

Las **demandas marshallianas** son:

$$x_A^* = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \cdot \frac{w}{p_A}, \quad x_B^* = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \cdot \frac{w}{p_B}, \quad x_C^* = \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \cdot \frac{w}{p_C}.$$

Cada bien absorbe una participación constante del ingreso:  $p_i x_i^* / w = \alpha_i / (\alpha + \beta + \gamma)$ .

$\square$

**Pregunta 4** (3 puntos). *Transformaciones de la función de utilidad.*

La **composición**  $f \circ u$  se define como  $(f \circ u)(x) = f(u(x))$ .

(a) (1,5 pts) **Caso concreto:**  $u(x, y) = xy$ ,  $f(t) = e^t$ ,  $\tilde{u}(x, y) = e^{xy}$ .

**Respuesta. (i) ¿Representa  $\tilde{u}$  las mismas preferencias?**

Sí.  $f(t) = e^t$  es estrictamente creciente, así que  $\tilde{u} = f \circ u$  es una transformación monótona de  $u$ :  $u(x) > u(y) \Leftrightarrow \tilde{u}(x) > \tilde{u}(y)$ . Ambas funciones ordenan las canastas de la misma manera.  $\square$

**(ii) Problema con  $\tilde{u}$ .**

Lagrangiano:  $\hat{\mathcal{L}} = e^{xy} - \hat{\lambda}(p_1x + p_2y - w)$ .

CPO:

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial x} = y e^{xy} - \hat{\lambda} p_1 = 0, \quad \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial y} = x e^{xy} - \hat{\lambda} p_2 = 0.$$

Dividiendo la primera entre la segunda:

$$\frac{y}{x} = \frac{p_1}{p_2} \implies y = \frac{p_1}{p_2} x.$$

Sustituyendo en la restricción  $p_1x + p_2y = w$ :

$$p_1x + p_2 \cdot \frac{p_1}{p_2} x = 2p_1x = w \implies x^* = \frac{w}{2p_1}.$$

De modo que:

$$\boxed{x^* = \frac{w}{2p_1}, \quad y^* = \frac{w}{2p_2}.$$

El multiplicador: de la primera CPO,  $\hat{\lambda}^* = y^* e^{x^*y^*} / p_1 = \frac{w}{2p_2} \cdot \frac{e^{w^2/(4p_1p_2)}}{p_1}$ .

**(iii) Problema con  $u$ .**

Lagrangiano:  $\mathcal{L} = xy - \lambda(p_1x + p_2y - w)$ . CPO:  $y = \lambda^* p_1$  y  $x = \lambda^* p_2$ . Restricción:  $p_1 \cdot \lambda^* p_2 + p_2 \cdot \lambda^* p_1 = 2\lambda^* p_1 p_2 = w$ , luego  $\lambda^* = \frac{w}{2p_1 p_2}$ .

Las demandas son las mismas:  $x^* = \lambda^* p_2 = \frac{w}{2p_1}$ ,  $y^* = \lambda^* p_1 = \frac{w}{2p_2}$ .  $\checkmark$

Comparando los multiplicadores:

$$\hat{\lambda}^* = y^* e^{x^*y^*} \cdot \frac{1}{p_1} = \frac{w}{2p_2} \cdot e^{w^2/(4p_1p_2)} \cdot \frac{1}{p_1} = \lambda^* \cdot e^{u(x^*, y^*)},$$

pues  $f'(t) = e^t$ , de modo que  $f'(u(x^*)) = e^{x^*y^*}$ . Esto confirma la relación  $\hat{\lambda}^* = f'(u(x^*)) \cdot \lambda^*$ .  $\square$

(b) (1,5 pts) **Caso general:**  $\tilde{u} = f(u(x))$ ,  $f' > 0$ .

**Respuesta. Problema original.** Lagrangiano  $\mathcal{L} = u(x) - \lambda(p \cdot x - w)$ .

CPO para el bien  $k$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lambda^* p_k. \quad (*)$$

**Problema transformado.** Lagrangiano  $\hat{\mathcal{L}} = f(u(x)) - \hat{\lambda}(p \cdot x - w)$ .

CPO para el bien  $k$  (regla de la cadena):

$$f'(u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_k} = \hat{\lambda} p_k. \quad (**)$$

(i) **Las demandas no cambian.** Para cualesquiera bienes  $k$  y  $j$ , dividiendo (\*\*) entre sí el factor  $f'$  se cancela:

$$\frac{\partial u / \partial x_k}{\partial u / \partial x_j} = \frac{p_k}{p_j},$$

que es exactamente la condición de tangencia de (\*). Como la restricción presupuestaria es idéntica, la solución óptima  $x^*$  no cambia.  $\square$

(ii) **Relación entre multiplicadores.** Dividiendo (\*\*) entre (\*) para el mismo bien  $k$ :

$$f'(u(x^*)) = \frac{\hat{\lambda}^*}{\lambda^*} \implies \boxed{\hat{\lambda}^* = f'(u(x^*)) \cdot \lambda^*} \quad \square$$

Conclusión: aunque la demanda no cambia, el multiplicador  $\lambda^*$  sí depende de qué función de utilidad usemos. Dos representaciones de las mismas preferencias dan multiplicadores distintos (a menos que  $f' = 1$ , es decir  $f$  sea lineal con pendiente 1). Por ello,  $\lambda^*$  no tiene un significado absoluto: solo sirve de referencia dentro de una representación fija.