

# Variación Compensatoria y Equivalente con Utilidad Cuasilineal

Marcelo Gallardo

21 de abril de 2026

---

## 1 Fundamentos y supuestos

**Definición 1** (Utilidad cuasilineal). Sea un consumidor con  $n$  bienes. Su función de utilidad es cuasilineal con numerario  $x_1$  si

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + v(x_2, \dots, x_n),$$

donde  $v : \mathbb{R}_+^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^2$ , estrictamente cóncava, y el precio del numerario se normaliza a  $p_1 = 1$ .

**Ejemplo 2** (Funciones de utilidad cuasilineales).

1. **Logarítmica** ( $n = 2$ ):  $u(x_1, x_2) = x_1 + \alpha \ln x_2$ , con  $\alpha > 0$ .
2. **Raíz** ( $n = 2$ ):  $u(x_1, x_2) = x_1 + \beta \sqrt{x_2}$ , con  $\beta > 0$ .
3. **Potencia** ( $n = 2$ ):  $u(x_1, x_2) = x_1 + \gamma x_2^a$ , con  $\gamma > 0$  y  $a \in (0, 1)$ .
4. **Cobb–Douglas en los no-numerarios** ( $n = 3$ ):  $u(x_1, x_2, x_3) = x_1 + A x_2^a x_3^b$ , con  $A > 0$ ,  $a, b > 0$  y  $a + b < 1$ .
5. **CES en los no-numerarios** ( $n$  bienes):  $u = x_1 + \left( \sum_{i=2}^n \alpha_i x_i^\rho \right)^{1/\rho}$ , con  $\alpha_i > 0$  y  $\rho < 1$ .

En todos los casos,  $v$  es creciente y estrictamente cóncava en sus argumentos.

### Papel de la monotonía: $v$ creciente en cada argumento

Un supuesto esencial es que  $v$  sea **estrictamente creciente** en cada variable:

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} > 0 \quad \forall i = 2, \dots, n.$$

Esto garantiza **preferencias monótonas**: más de cualquier bien es (débilmente) preferido. Sin monotonía la demostración falla por las siguientes razones:

1. **Solución interior.** Las condiciones de primer orden  $\partial v / \partial x_i = p_i > 0$  requieren que las derivadas parciales de  $v$  sean positivas; de lo contrario las demandas óptimas podrían situarse en la frontera y depender de  $m$ .
2. **Inversión de la utilidad indirecta.** La estructura  $V(p, m) = m + \varphi(p)$  —que es la clave de la demostración— solo vale cuando la restricción presupuestaria se satura y  $x_1$  absorbe residualmente toda la renta. Esto exige que gastar más en  $x_1$  siempre sea deseable, lo cual es exactamente la monotonía en  $x_1$  (que con cuasilinealidad ya está garantizada, pues el coeficiente de  $x_1$  es  $1 > 0$ ) combinada con que el óptimo interior en los demás bienes exista.

## Resumen de supuestos

- $v$  **estrictamente creciente**: garantiza solución interior y que la renta marginal se canalice vía el numerario.
- $v$  **estrictamente cóncava**: garantiza unicidad de las demandas y que las CPO sean suficientes.
- Ambos juntos implican **ausencia de efecto renta** en  $x_2, \dots, x_n$ , que es lo que hace  $VC = VE$ .

## 2 La demostración

### 2.1 Paso 1 — Problema del consumidor

El consumidor resuelve

$$\max_{x_1, \dots, x_n} x_1 + v(x_2, \dots, x_n) \quad \text{s.a.} \quad x_1 + \sum_{i=2}^n p_i x_i = m, \quad x_2, \dots, x_n > 0.$$

Dado que  $v$  es estrictamente creciente en todos sus argumentos y el coeficiente de  $x_1$  es  $1 > 0$ , la restricción presupuestaria se satura con igualdad.<sup>1</sup>

El problema reducido es entonces

$$\max_{x_2, \dots, x_n > 0} m + v(x_2, \dots, x_n) - \sum_{i=2}^n p_i x_i.$$

**Condiciones de primer orden:**

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x_2^*, \dots, x_n^*) = p_i, \quad i = 2, \dots, n.$$

### Resultado principal

Las demandas óptimas  $x_i^*(p)$ ,  $i \geq 2$ , son funciones **solo de los precios**: no dependen de  $m$ . Toda variación de renta se absorbe por  $x_1$ .

### 2.2 Paso 2 — Utilidad indirecta y función de gasto

Definamos el *excedente neto del consumo no-numerario*:

$$\varphi(p) = \max_{x_2, \dots, x_n > 0} \left\{ v(x_2, \dots, x_n) - \sum_{i=2}^n p_i x_i \right\}.$$

Entonces:

$$\text{Utilidad indirecta:} \quad V(p, m) = m + \varphi(p), \quad (1)$$

$$\text{Función de gasto:} \quad e(p, \bar{u}) = \bar{u} - \varphi(p). \quad (2)$$

<sup>1</sup>La igualdad  $x_1 = m - \sum_{i=2}^n p_i x_i$  se cumple gracias a los supuestos de monotonía: si sobrara renta, el consumidor la destinaría a  $x_1$  (o a cualquier otro bien), aumentando su utilidad. Así, el problema se reduce a  $\max_{x_2, \dots, x_n > 0} m + v(x_2, \dots, x_n) - \sum_{i=2}^n p_i x_i$ .

La ecuación (2) se obtiene invirtiendo (1): si  $\bar{u} = m + \varphi(p)$ , entonces  $m = \bar{u} - \varphi(p)$ .

Nótese que  $e$  es **lineal en**  $\bar{u}$  con pendiente 1: el nivel de utilidad solo desplaza el gasto en el numerario.

### 2.3 Paso 3 — Cálculo de VC y VE

Sea un cambio de precios  $p^0 \rightarrow p^1$  con renta  $m$  fija. Los niveles de utilidad antes y después son:

$$u^0 = m + \varphi(p^0), \quad u^1 = m + \varphi(p^1).$$

**Variación Compensatoria** — renta que, a precios  $p^1$ , devuelve al consumidor a  $u^0$ :

$$\begin{aligned} VC &= e(p^1, u^0) - m \\ &= [u^0 - \varphi(p^1)] - m \\ &= [m + \varphi(p^0) - \varphi(p^1)] - m \\ &= \varphi(p^0) - \varphi(p^1). \end{aligned}$$

**Variación Equivalente** — renta que, a precios  $p^0$ , lleva al consumidor a  $u^1$ :

$$\begin{aligned} VE &= m - e(p^0, u^1) \\ &= m - [u^1 - \varphi(p^0)] \\ &= m - [m + \varphi(p^1) - \varphi(p^0)] \\ &= \varphi(p^0) - \varphi(p^1). \end{aligned}$$

#### Resultado principal

$$VC = VE = \varphi(p^0) - \varphi(p^1)$$

## 3 Interpretación gráfica

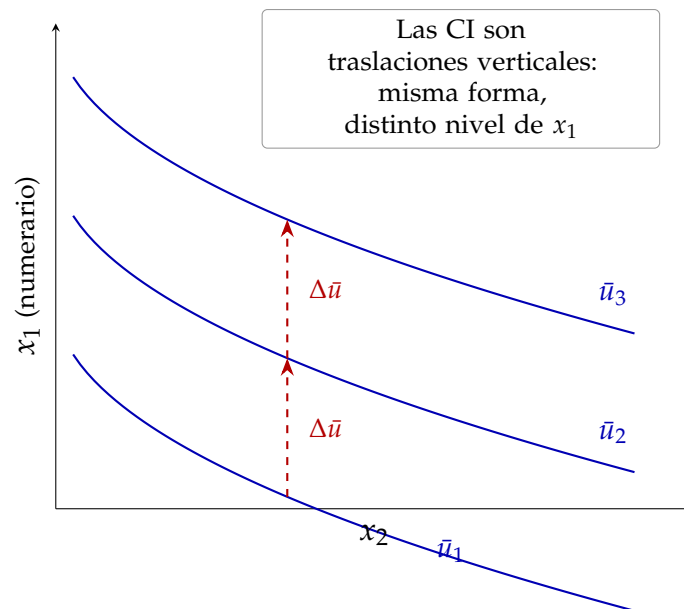


Figure 1: Curvas de indiferencia cuasilineales ( $n = 2$ ). El numerario  $x_1$  se ubica en el eje vertical: cambiar  $\bar{u}$  solo desplaza la curva verticalmente, sin alterar su curvatura en  $x_2$ .

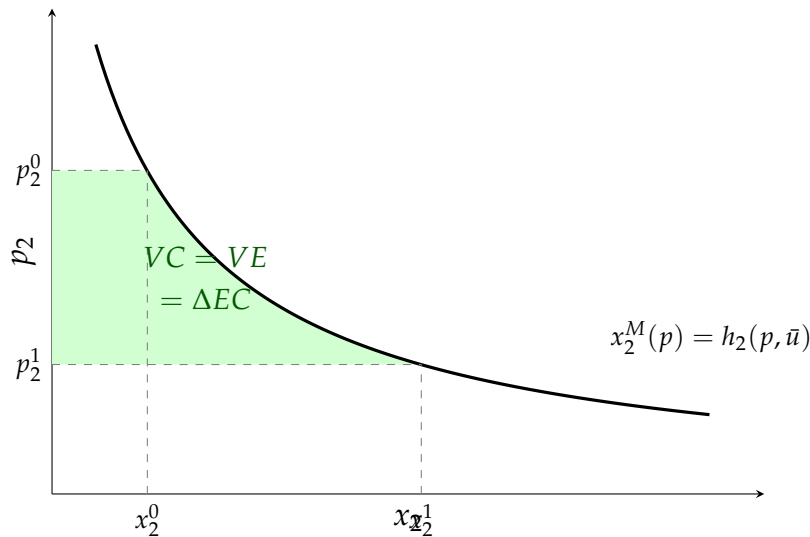


Figure 2: Con utilidad cuasilineal, la demanda marshalliana  $x_2^M(p)$  coincide con la hicksiana  $h_2(p, \bar{u})$  para todo  $\bar{u}$ . El área sombreada entre  $p_2^0$  y  $p_2^1$  a la izquierda de la curva de demanda inversa es la medida *exacta* del cambio de bienestar.

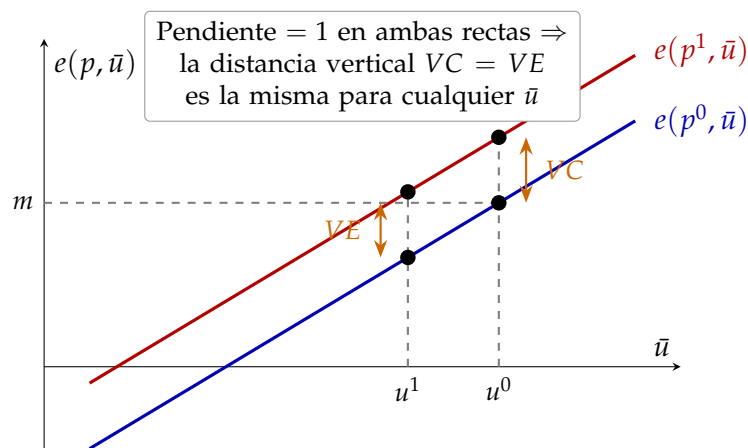


Figure 3: La función de gasto es lineal en  $\bar{u}$  con pendiente 1. Cambiar el nivel de referencia ( $u^0$  vs.  $u^1$ ) no altera la distancia vertical entre las dos rectas:  $VC = VE = \varphi(p^0) - \varphi(p^1)$ .

## 4 Interpretación económica

### ¿Por qué coinciden $VC$ y $VE$ ?

La razón de fondo es la **ausencia de efecto renta** en los bienes  $x_2, \dots, x_n$ . Toda variación de riqueza se canaliza íntegramente al numerario  $x_1$ , dejando inalteradas las demandas de los demás bienes.

- **Demanda hicksiana = marshalliana:**  $h_i(p, \bar{u}) = x_i^M(p)$  para  $i \geq 2$ , independiente de  $\bar{u}$ .
- **Excedente exacto:** El excedente marshalliano del consumidor no es una aproximación sino una medida *exacta* del cambio de bienestar:  $\Delta EC = VC = VE$ .

- **Geometría:** las curvas de indiferencia son traslaciones verticales (Figura 1); la función de gasto es lineal en  $\bar{u}$  con pendiente unitaria (Figura 3). Por ello, la diferencia de gasto entre dos vectores de precios no depende del nivel de utilidad de referencia.

### **Implicación práctica**

La cuasilinealidad elimina la ambigüedad que normalmente existe al medir cambios de bienestar: no importa si se evalúa a precios “antes” o “después”, el resultado es el mismo. Esto la convierte en el supuesto favorito en diseño de mecanismos, economía pública y organización industrial, donde se necesita una medida cardinal no ambigua del excedente.