Facultad de Ciencias Sociales
Especialidad de Economía
Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)
Ciclo 2026-1

Microeconomía 1
Notas de teoría

Externalidades, bienes públicos y capital en el tiempo

Jefes de práctica: Marcelo Gallardo, Raúl Amao

1 Externalidades

Definición 1.1. Existe una *externalidad* cuando la actividad de un agente afecta el bienestar (o la producción) de otro a través de un canal ajeno al mercado, sin compensación. El efecto puede ser negativo (contaminación) o positivo (un apiario que poliniza un huerto).

1.1 Externalidad de producción

Dos firmas tomadoras de precios: la acerera S produce acero s y contaminación x, y la pesquera F produce pescado f, río abajo. Los costos dependen de x:

$$\frac{\partial C_S}{\partial x} \leq 0 \quad \text{(contaminar abarata a } S\text{)}, \qquad \frac{\partial C_F}{\partial x} \geq 0 \quad \text{(contaminar encarece a } F\text{)}.$$

Equilibrio descentralizado. Cada firma optimiza por su cuenta:

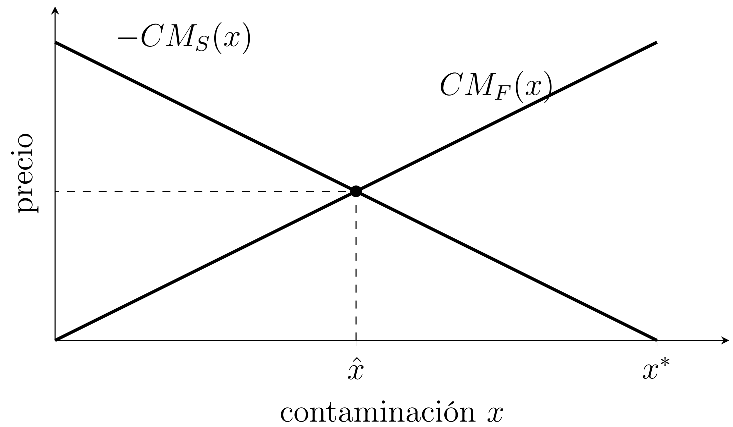
$$\max_{s,x}\ p_S s - C_S(s,x) \ \Rightarrow\ p_S = \frac{\partial C_S}{\partial s}, \quad \boxed{-\frac{\partial C_S}{\partial x} = 0}, \qquad \max_{f}\ p_F f - C_F(f,x) \ \Rightarrow\ p_F = \frac{\partial C_F}{\partial f}.$$

La acerera contamina hasta que su *propio* costo marginal de contaminar se anula, ignorando el daño $\partial C_F/\partial x > 0$ que impone a la pesquera (F no controla x).

Asignación eficiente. Una firma fusionada (o el planificador) maximiza el beneficio conjunto $\Pi_S + \Pi_F$; la condición en x internaliza ambos efectos:

$$\boxed{-\frac{\partial C_S}{\partial x} = \frac{\partial C_F}{\partial x}} \qquad \text{(beneficio marginal de contaminar = daño marginal).} \tag{1}$$

Como en el óptimo $\partial C_F/\partial x > 0$, el nivel eficiente $\hat{x}$ es *menor* que el descentralizado: el mercado produce **demasiada** contaminación.



El óptimo $\hat{x}$ iguala el beneficio marginal de contaminar $-CM_S$ con el daño marginal CM_F. El privado x^* (donde $-CM_S = 0$) es mayor.

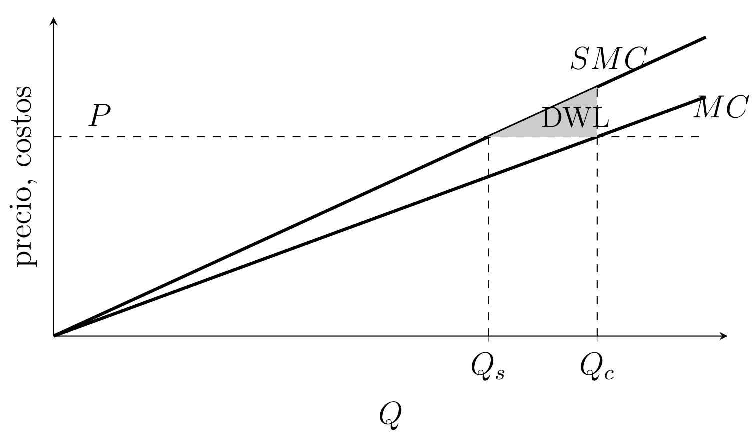
1.2 Soluciones: impuesto pigouviano, derechos de propiedad y Coase

Impuesto pigouviano. Un impuesto t por unidad de contaminación cambia la CPO de la acerera a $-\partial C_S/\partial x = t$. Fijando

$$t^* = \frac{\partial C_F}{\partial x}\bigg|_{\hat{x}} \tag{2}$$

(el daño marginal *evaluado en el óptimo*), la acerera elige $\hat{x}$. El impuesto debe medirse en $\hat{x}$, no en el nivel privado.

En equilibrio parcial: sea $MC(Q)$ el costo marginal privado y $SMC(Q) = MC(Q) +$ (daño marginal) el social. El mercado iguala $P = MC$ (Q_c); el óptimo exige $P = SMC$ ($Q_s < Q_c$). La pérdida irrecuperable es el triángulo entre SMC y P en $[Q_s, Q_c]$, y $t^* = SMC(Q_s) - MC(Q_s)$.



Derechos de propiedad y teorema de Coase. Si se crean derechos de contaminación *bien definidos y transables*, las firmas negocian su precio q. Asignando el derecho a la pesquera o a la acerera, en ambos casos el mercado de permisos vacía en (**??**), dando el mismo $\hat{x}$.

> **Teorema de Coase.** Con derechos bien definidos y costos de transacción nulos, el nivel de contaminación de equilibrio es eficiente e *independiente* de a quién se asignen los derechos. La asignación solo afecta la *distribución* del excedente.

La relevancia práctica del teorema está limitada por costos de transacción altos y por consideraciones distributivas (puede requerir que el afectado pague).

2 Bienes públicos

Definición 2.1. Un bien es *no rival* si el consumo de una unidad adicional tiene costo marginal social nulo; es *no excluyente* si no se puede impedir su consumo a quien no paga. Un *bien público puro* es no rival y no excluyente (defensa nacional). La rivalidad y la exclusión son independientes: un peaje excluye de una carretera no rival; un banco de peces es rival pero no excluyente (acceso común).

2.1 Provisión óptima: condición de Samuelson

Economía con un bien privado x_i (numerario), un bien público G producido a costo marginal TMT (en unidades de numerario), y consumidores $i = 1, \ldots, n$ con utilidad $u_i(x_i, G)$. El planificador maximiza la utilidad de uno sujeta a las de los demás y a los recursos $\sum_i x_i + \mathrm{TMT} \cdot G = M$. El Lagrangiano (dos consumidores) es

$$\mathcal{L} = u_A(x_A, G) + \lambda\big(u_B(x_B, G) - \bar{u}_B\big) + \mu\big(M - x_A - x_B - \mathrm{TMT}\, G\big).$$

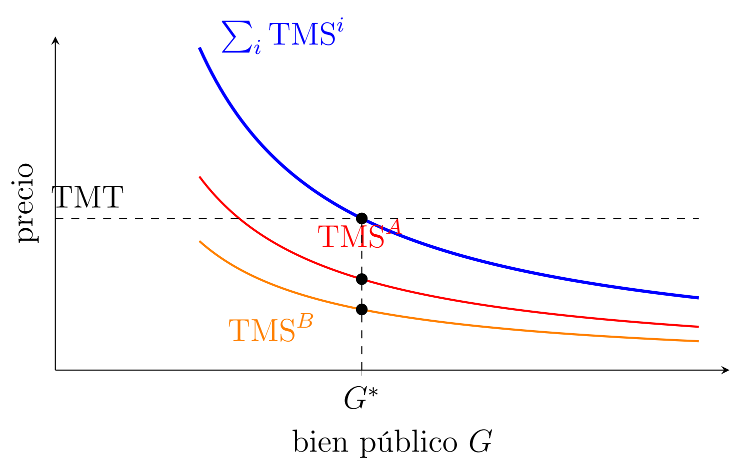
Las CPO en x_A, x_B, G dan $\mu = 1$, $\lambda = 1$ y $\dfrac{\partial u_A}{\partial G} + \dfrac{\partial u_B}{\partial G} = \mathrm{TMT}$. Dividiendo cada término por la utilidad marginal del bien privado respectivo,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{TMS}^i = \mathrm{TMT}}, \qquad \mathrm{TMS}^i = \frac{\partial u_i/\partial G}{\partial u_i/\partial x_i}. \tag{3}$$

A diferencia de un bien privado ($\mathrm{TMS}^i = \mathrm{TMT}$ para cada i), aquí se igualan la *suma* de las disposiciones marginales a pagar y el costo marginal: como todos disfrutan la misma unidad adicional, su valor social es la suma de las valoraciones.

2.2 Agregación vertical y falla del mercado

La demanda inversa individual por el bien público es $p_i(G) = \mathrm{TMS}^i(G)$. Como el bien es no rival (todos consumen el mismo G), la disposición a pagar agregada es la *suma vertical* $P(G) = \sum_i \mathrm{TMS}^i(G)$, y la eficiencia exige $P(G) = \mathrm{TMT}$.



Para un bien público las demandas se suman *verticalmente*; el óptimo G^* iguala $\sum_i \text{TMS}^i$ con TMT.

En el mercado competitivo cada consumidor iguala $\text{TMS}^i = p_G/p_x$ y los productores $\text{TMT} = p_G/p_x$; luego $\text{TMS}^i = \text{TMT}$ para cada i, lo que *no* cumple (**??**). El precio relativo es “demasiado bajo” y el bien público se **subprovee**: cada agente ignora el beneficio que su gasto genera a los demás.

2.3 Free-rider y precios de Lindahl

Bajo *provisión voluntaria* (cada i aporta g_i, $G = \sum_i g_i$), el equilibrio de Nash subprovee porque cada agente iguala solo su TMS^i al costo marginal; el problema se agrava con n (polizonaje).

Los *precios de Lindahl* son precios personalizados p_i con $\sum_i p_i = \text{TMT}$ tales que, enfrentando p_i, todos demandan el mismo G^* ($\text{TMS}^i = p_i$). Entonces

$$\sum_i \text{TMS}^i = \sum_i p_i = \text{TMT},$$

y la asignación es eficiente. Su limitación: como la cuota p_i depende de la demanda reportada, cada agente tiene incentivo a *subdeclarar* su valoración. La revelación veraz de preferencias por bienes públicos es, por ello, el problema central de la economía pública.

3 Capital en el tiempo

3.1 Valor presente descontado (tiempo continuo)

Con tasa instantánea $r > 0$ constante, el valor presente de un flujo $f(t)$ sobre $[0, T]$ es

$$\text{PDV} = \int_0^T f(t)\, e^{-rt}\, dt. \tag{4}$$

Casos útiles (con $T \to \infty$):

$$f \equiv 1 : \ \text{PDV} = \frac{1}{r}; \qquad f(t) = f_0 e^{gt} \ (r > g) : \ \text{PDV} = \frac{f_0}{r-g} \ \text{(Gordon)}.$$

El análogo discreto de la perpetuidad es $\sum_{n \geq 1} N(1+i)^{-n} = N/i$; la equivalencia entre capitalización discreta y continua es $1 + i = e^r$, esto es $r = \ln(1+i) \approx i$ para i pequeño.

3.2 Duración

La *duración* es el tiempo medio (ponderado por valor presente) de espera del pago:

$$D = \frac{\int_0^T t\, f(t)\, e^{-rt}\, dt}{\int_0^T f(t)\, e^{-rt}\, dt}. \tag{5}$$

Para una perpetuidad constante, $D = \dfrac{1/r^2}{1/r} = \dfrac{1}{r}$; para una creciente, $D = \dfrac{1}{r-g} > \dfrac{1}{r}$ (el peso se desplaza a los pagos futuros).

3.3 Costo de uso del capital

Considere una máquina de precio p, depreciación d y tasa r. El *costo de uso* (tasa de alquiler de equilibrio sin beneficios) se obtiene por arbitraje: comprarla, alquilarla un periodo por v y revenderla debe rendir lo mismo que el activo seguro:

$$p(1+r) = v + (1-d)p \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v = p(r+d)}.$$

Los componentes son el interés rp y la depreciación dp. Si el precio de la máquina crece a una tasa esperada π, el arbitraje $p(1+r) = v + (1-d)(1+\pi)p$ da

$$v \approx p\,(r + d - \pi), \tag{6}$$

es decir, costo de uso = interés + depreciación − ganancia de capital esperada. En tiempo continuo, $v(t) = (r+d)p(t) - \dot{p}(t)$. Si $d = 0$ la máquina es un bono perpetuo: $p = v/r$.

3.4 Momento óptimo: la regla interés = tasa de crecimiento

Un activo cuyo valor crece con la espera, $V(t)$, se vende cuando se maximiza $e^{-rt}V(t)$:

$$\frac{d}{dt}\big[e^{-rt}V(t)\big] = e^{-rt}\big(V'(t) - rV(t)\big) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{V'(t)}{V(t)} = r}.$$

Se cosecha cuando la tasa de crecimiento del activo cae hasta la tasa de interés (costo de oportunidad del capital). Un costo de plantar constante es irrelevante para t^* (escala PDV sin mover el máximo); un mayor r adelanta la cosecha. La condición de segundo orden requiere $\dfrac{d}{dt}\big(V'/V\big) < 0$ en t^*.

Cosecha única (regla de Wicksell). Antes de replantar, conviene fijar el caso base. Si el rodal se tala una sola vez a la edad T y su volumen crece según $f(T)$ (con $f' > 0$, $f'' < 0$ a partir de cierta edad), el dueño maximiza el valor presente de la tala,

$$\max_{T \geq 0} \; p\,f(T)\,e^{-rT}.$$

La condición de primer orden es

$$\frac{d}{dT}\big[pf(T)e^{-rT}\big] = p\,e^{-rT}\big(f'(T) - rf(T)\big) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{f'(T)}{f(T)} = r}.$$

Es decir, se tala cuando la tasa de crecimiento biológico del bosque f'/f iguala la tasa de interés: mientras el bosque crezca más rápido que r, conviene esperar; cuando crece más lento, conviene talar e invertir el ingreso a la tasa r.

Rotación de Faustmann. Si el terreno se replanta indefinidamente, cada rotación dura T años, cuesta C al plantar y produce $pf(T)$ al cosechar. El valor presente de un ciclo (plantar en $t = 0$, cosechar en $t = T$) es

$$-\,C + p\,f(T)\,e^{-rT}.$$

Como los ciclos son idénticos y el siguiente empieza en $t = T$, el valor del terreno (Land Expectation Value) es la suma geométrica

$$V(T) = \big(pf(T)e^{-rT} - C\big) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nrT} = \frac{p\,f(T)\,e^{-rT} - C}{1 - e^{-rT}}.$$

Para optimizar escribimos $V = N/D$ con $N(T) = pf(T)e^{-rT} - C$ y $D(T) = 1 - e^{-rT}$, de modo que

$$N'(T) = p\,e^{-rT}\big(f'(T) - rf(T)\big), \qquad D'(T) = r\,e^{-rT}.$$

La condición $V'(T) = 0$ equivale a $N'D = ND'$:

$$\begin{gathered} p\,e^{-rT}\big(f' - rf\big)\big(1 - e^{-rT}\big) = \big(pfe^{-rT} - C\big)\,r\,e^{-rT} \\ p\big(f' - rf\big)\big(1 - e^{-rT}\big) = r\,N = r\,D\,V. \end{gathered}$$

Dividiendo entre $D = 1 - e^{-rT}$ se obtiene $p(f' - rf) = rV$, esto es

$$\boxed{p\,f'(T) = r\,p\,f(T) + r\,V(T)}. \tag{7}$$

Interpretación. En el óptimo, el *beneficio marginal de esperar* (el valor del crecimiento del bosque, $pf'(T)$) iguala al *costo marginal de esperar*, compuesto por dos términos:

- $r\,pf(T)$: el interés que se deja de ganar sobre el valor de la madera en pie si se pospone la venta;
- $r\,V(T)$: el interés sobre el valor del propio terreno, pues al retrasar la cosecha se posponen *todas* las rotaciones futuras y se renuncia al rendimiento r sobre V.

El término adicional $r\,V(T) > 0$ —el costo de oportunidad del suelo, ausente en el caso de cosecha única— exige un $pf'(T)$ mayor y, como f'/f es decreciente, se alcanza *antes*. Por tanto $T_{\text{Faustmann}} < T_{\text{Wicksell}}$: la posibilidad de replantar acorta la rotación óptima. En el límite $V \to 0$ (por ejemplo C muy alto o r alto que aniquila las rentas futuras) se recupera la regla de cosecha única $f'/f = r$.

3.5 Recursos agotables: la regla de Hotelling

El dueño de un yacimiento finito con stock $x(t)$, $x(0) = x_0$, extrae a tasa $q = -\dot{x} \geq 0$ y maximiza el valor presente del flujo de rentas

$$\max_{q(\cdot)\geq 0} \int_0^{\infty} (p - c)\,q\,e^{-rt}\,dt \qquad \text{sujeto a} \qquad \dot{x} = -q, \quad x(t) \geq 0,$$

donde p es el precio y c el costo marginal de extracción. El Hamiltoniano de valor presente, con coestado λ asociado a $\dot{x} = -q$, es

$$H = (p - c)\,q\,e^{-rt} + \lambda(-q).$$

Las condiciones de Pontryagin son

$$\frac{\partial H}{\partial q} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = (p - c)\, e^{-rt}, \tag{8}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \text{const}, \tag{9}$$

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t)\, x(t) = 0 \quad \text{(transversalidad).}$$

El precio sombra de valor presente λ es la *renta de escasez* descontada y es constante a lo largo de la trayectoria óptima (porque H no depende de x). De (**??**)–(**??**),

$$(p - c)\, e^{-rt} = \lambda = \text{const} \quad \Longrightarrow \quad p(t) - c(t) = \lambda\, e^{rt}.$$

Diferenciando $(p - c)e^{-rt} = \lambda$ respecto de t,

$$\big(\dot{p} - \dot{c}\big)e^{-rt} - r(p - c)e^{-rt} = 0,$$

de donde

$$\boxed{\dot{p} = r\,(p - c) + \dot{c}} \qquad \text{(regla de Hotelling).} \tag{10}$$

No arbitraje intertemporal. La renta de escasez $p - c$ es el valor de dejar una unidad bajo tierra. Mantener ese activo debe rendir lo mismo que cualquier otro: su ganancia de capital $(\dot{p} - \dot{c})$ ha de igualar el rendimiento $r(p - c)$ de venderlo hoy e invertir el ingreso. El propietario queda así *indiferente* entre extraer hoy (e invertir a la tasa r) y extraer mañana. Si el costo es constante ($\dot{c} = 0$), la renta crece exactamente a la tasa r, $\dot{p} = r(p - c)$; y con $c = 0$ el precio sigue $p(t) = p_0 e^{rt}$. Un abaratamiento tecnológico de la extracción ($\dot{c} < 0$) hace que el precio crezca *más lento* que $r(p - c)$.

Versión en valor corriente. El mismo resultado se obtiene, de forma más transparente, con el Hamiltoniano de valor corriente $\widehat{H} = (p - c)q - \mu q$, donde $\mu = \lambda e^{rt}$ es la renta de escasez *no descontada*. Entonces $\partial \widehat{H}/\partial q = 0$ da $\mu = p - c$, y la ecuación del coestado $\dot{\mu} = r\mu - \partial \widehat{H}/\partial x = r\mu$ entrega $\mu(t) = \mu_0 e^{rt}$: la renta de escasez crece a la tasa r, que es la regla de Hotelling.

Cierre del modelo. La regla de Hotelling fija la *tasa* de crecimiento del precio, pero no su nivel inicial. Para cerrarlo se añade la demanda $q = D(p)$ (decreciente) y la restricción de agotamiento del stock. Con $c = 0$ y precio de estrangulamiento $\bar{p}$ (aquel para el que $D(\bar{p}) = 0$), el yacimiento se vacía justo cuando el precio alcanza $\bar{p}$ en un instante T:

$$p_0\, e^{rT} = \bar{p}, \qquad \int_0^T D\big(p_0 e^{rt}\big)\, dt = x_0.$$

Estas dos ecuaciones determinan (p_0, T): el nivel inicial de la renta de escasez p_0 y la fecha de agotamiento. La transversalidad $\lim_{t\to T} \lambda(t)x(t) = 0$ se satisface porque $x(T) = 0$ (el recurso se usa por completo).