Minimización del Gasto

Un desarrollo completo en $\mathbb{R}^2_+$

Marcelo Gallardo

20 de abril de 2026

Contenidos

1 Introducción

En la teoría del consumidor existen dos enfoques duales para analizar las decisiones óptimas. El primero, que usualmente se estudia primero, es el *problema de maximización de la utilidad*: dado un presupuesto fijo, el consumidor elige la canasta que le reporta la mayor satisfacción. El segundo enfoque, que es el objeto de este documento, es el **problema de minimización del gasto**: dado un nivel de utilidad que se desea alcanzar, el consumidor busca la canasta que lo logre al menor costo posible.

1.1 Formulación general

En un mundo con n bienes, el problema se escribe como:

$$\min_{x_1,\ldots,x_n \geq 0} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \quad \text{sujeto a} \quad u(x_1,\ldots,x_n) \geq \bar{u}.$$

Notemos que $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$, donde $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)^\top \in \mathbb{R}^n_+$ es el vector de cantidades, $\mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_n)^\top \in \mathbb{R}^n_{++}$ es el vector de precios, y $\cdot$ denota el producto interno (ver curso de Matemáticas para Economistas 2).

En este apunte trabajaremos exclusivamente con **dos bienes** ($n = 2$), lo que nos permite aprovechar herramientas gráficas y simplificar el álgebra sin perder las ideas esenciales.

1.2 El problema en dos bienes

Problema de minimización del gasto en $\mathbb{R}^2_+$

$$\min_{x_1,x_2 \geq 0} p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad \text{sujeto a} \quad u(x_1,x_2) \geq \bar{u}.$$

La idea intuitiva es directa: el consumidor quiere alcanzar el nivel de utilidad $\bar{u}$ gastando lo menos posible. Para ello, debe elegir una canasta (x_1^*, x_2^*) que esté *sobre* la curva de indiferencia $\bar{u}$ (o por encima de ella) y que, al mismo tiempo, se ubique en la recta de isocosto más baja posible.

1.3 Demandas hicksianas y función de gasto

La solución del problema anterior genera dos objetos fundamentales.

Definición 1.1 (Demandas hicksianas o compensadas). *Las **demandas hicksianas** $h_i(\cdot)$ son las funciones que expresan las cantidades óptimas de cada bien en términos de los precios y del nivel de utilidad objetivo:*

$$h_1(p_1,p_2,\bar{u}), \quad h_2(p_1,p_2,\bar{u}).$$

Se llaman compensadas *porque mantienen la utilidad constante; si cambian los precios, las cantidades se ajustan para preservar $\bar{u}$.*

Definición 1.2 (Función de gasto). *La **función de gasto** es el valor óptimo del problema, es decir, el gasto mínimo necesario para alcanzar $\bar{u}$:*

$$e(p_1,p_2,\bar{u}) = p_1\, h_1(p_1,p_2,\bar{u}) + p_2\, h_2(p_1,p_2,\bar{u}).$$

2 Planteamiento geométrico en dos bienes

Antes de resolver analíticamente, es muy útil comprender la geometría del problema.

2.1 Rectas de isocosto

Una **recta de isocosto** es el conjunto de canastas que cuestan exactamente E unidades monetarias:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = E \quad \iff \quad x_2 = \frac{E}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1.$$

Es una recta con pendiente $-p_1/p_2$ e intercepto vertical E/p_2. Rectas más cercanas al origen representan *menor gasto*.

2.2 Curvas de indiferencia

La curva de indiferencia asociada al nivel $\bar{u}$ es el conjunto:

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : u(x_1, x_2) = \bar{u}\}.$$

Su forma depende de las preferencias: convexa al origen (Cobb-Douglas, CES), en forma de L (Leontief), o líneas rectas (lineal).

2.3 Tangencia y solución óptima

Minimizar el gasto equivale a *desplazar la recta de isocosto hacia el origen* hasta que sea apenas tangente a la curva de indiferencia $\bar{u}$. En el punto de tangencia (solución interior), la pendiente de la curva de indiferencia iguala la pendiente de la recta de isocosto:

$$\mathrm{TMS}_{12} = \frac{p_1}{p_2}.$$

No siempre la solución es interior. Cuando las preferencias admiten sustitución perfecta (caso lineal), la solución puede ser de **esquina**: el consumidor gasta todo en un solo bien. Cuando los bienes son complementos perfectos (Leontief), la solución se ubica en el vértice de la curva de indiferencia en forma de L.

2.4 Figura: planteamiento geométrico

3 Caso Cobb-Douglas

3.1 La función de utilidad

Consideremos la función de utilidad Cobb-Douglas:

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Condiciones sobre los parámetros

Los exponentes α y β son positivos y, por lo usual, menores que 1. Esto garantiza rendimientos marginales decrecientes en cada bien. No necesitamos imponer $\alpha + \beta = 1$ por ahora; trabajaremos con exponentes generales.

Monotonicidad

Las utilidades marginales son:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \alpha\, x_1^{\alpha-1}\, x_2^{\beta} > 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \beta\, x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta-1} > 0,$$

para $x_1, x_2 > 0$. Ambas son estrictamente positivas, así que más de cualquier bien siempre es preferido.

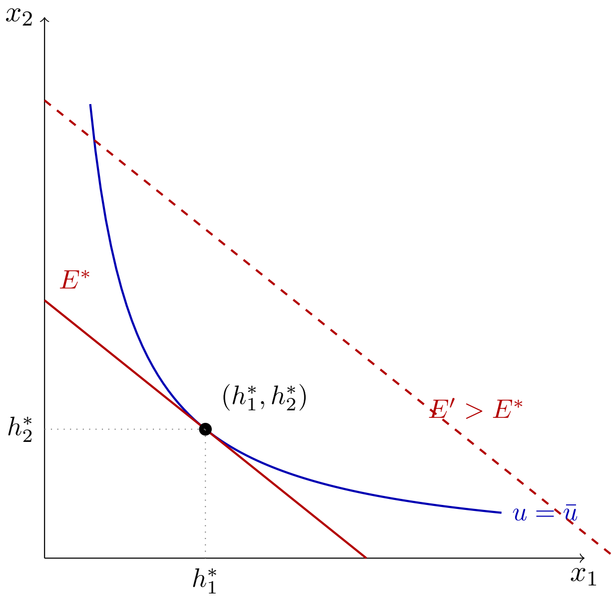

Figura 1: Minimización del gasto: la recta de isocosto más baja tangente a la curva de indiferencia $\bar{u}$ determina la canasta óptima (h_1^*, h_2^*).

Convexidad de las preferencias

Las curvas de indiferencia de la Cobb-Douglas son **estrictamente convexas** al origen. Esto se verifica observando que la tasa marginal de sustitución:

$$\mathrm{TMS}_{12} = \frac{\alpha\, x_2}{\beta\, x_1}$$

es *decreciente* a lo largo de cada curva de indiferencia (a medida que x_1 aumenta y x_2 disminuye; ver PD2, ejercicio 2.1.1). Las preferencias convexas garantizan que el problema de minimización tiene una solución única e interior.

¿Por qué la solución es interior?

Cuando $x_i \to 0$, la utilidad marginal del bien i tiende a infinito (dado que $0 < \alpha, \beta < 1$, porque $u \to 0$ en los ejes). Esto significa que es infinitamente "productivo" comprar la primera unidad de cada bien: nunca conviene consumir cero de alguno. Por tanto, la solución óptima satisface $x_1^*, x_2^* > 0$.

3.2 Formulación del Lagrangiano

El problema es:

$$\min_{x_1, x_2 > 0} \; p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad \text{s.a.} \quad x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta} \geq \bar{u}.$$

Por monotonicidad, la restricción se cumple con igualdad en el óptimo. Definimos el lagrangiano:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \lambda\big(\bar{u} - x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta}\big).$$

Observemos el signo: como estamos *minimizando* y la restricción es $u \geq \bar{u}$, escribimos $+\lambda(\bar{u} - u)$ con $\lambda > 0$.

3.3 Condiciones de primer orden (CPO)

Derivando e igualando a cero:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = p_1 - \lambda\,\alpha\,x_1^{\alpha-1}\,x_2^{\beta} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = p_2 - \lambda\,\beta\,x_1^{\alpha}\,x_2^{\beta-1} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \bar{u} - x_1^{\alpha}\,x_2^{\beta} = 0. \tag{3}$$

3.4 Derivación de las demandas hicksianas

De (1):

$$\lambda = \frac{p_1}{\alpha\,x_1^{\alpha-1}\,x_2^{\beta}}.$$

De (2):

$$\lambda = \frac{p_2}{\beta\,x_1^{\alpha}\,x_2^{\beta-1}}.$$

Igualando ambas expresiones de λ:

$$\frac{p_1}{\alpha\,x_1^{\alpha-1}\,x_2^{\beta}} = \frac{p_2}{\beta\,x_1^{\alpha}\,x_2^{\beta-1}}.$$

Multiplicando en cruz:

$$p_1\,\beta\,x_1^{\alpha}\,x_2^{\beta-1} = p_2\,\alpha\,x_1^{\alpha-1}\,x_2^{\beta}.$$

Dividiendo ambos lados entre $x_1^{\alpha-1}\,x_2^{\beta-1}$:

$$p_1\,\beta\,x_1 = p_2\,\alpha\,x_2.$$

Despejamos la relación entre bienes:

$$x_2 = \frac{p_1\,\beta}{p_2\,\alpha}\,x_1. \tag{4}$$

Ahora sustituimos (4) en la restricción (3): $x_1^{\alpha}\,x_2^{\beta} = \bar{u}$:

$$x_1^{\alpha}\left(\frac{p_1\,\beta}{p_2\,\alpha}\right)^{\beta} x_1^{\beta} = \bar{u}.$$

$$x_1^{\alpha+\beta}\left(\frac{p_1\,\beta}{p_2\,\alpha}\right)^{\beta} = \bar{u}.$$

Despejando x_1:

$$x_1^{\alpha+\beta} = \bar{u}\left(\frac{p_2\,\alpha}{p_1\,\beta}\right)^{\beta}.$$

$$x_1 = \bar{u}^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{p_2\,\alpha}{p_1\,\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}.$$

Demanda hicksiana de bien 1 — Cobb-Douglas

$$h_1(p_1, p_2, \bar{u}) = \bar{u}^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\alpha\,p_2}{\beta\,p_1}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}.$$

Para obtener h_2, sustituimos en (4):

$$h_2 = \frac{p_1\beta}{p_2\alpha}\, h_1 = \frac{p_1\beta}{p_2\alpha}\, \bar{u}^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha\, p_2}{\beta\, p_1}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}.$$

Notemos que $\frac{p_1\beta}{p_2\alpha} = \left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1}\right)^{-1}$. Entonces:

$$h_2 = \bar{u}^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha\, p_2}{\beta\, p_1}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}-1} = \bar{u}^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha\, p_2}{\beta\, p_1}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}.$$

Lo cual equivale a:

Demanda hicksiana de bien 2 — Cobb-Douglas

$$h_2(p_1, p_2, \bar{u}) = \bar{u}^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta\, p_1}{\alpha\, p_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}.$$

3.5 Derivación de la función de gasto

La función de gasto es $e = p_1 h_1 + p_2 h_2$. Factorizando $\bar{u}^{1/(\alpha+\beta)}$:

$$e = \bar{u}^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left[p_1 \left(\frac{\alpha\, p_2}{\beta\, p_1}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + p_2 \left(\frac{\beta\, p_1}{\alpha\, p_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right].$$

Trabajemos el primer término dentro del corchete. Separamos las potencias de precios y parámetros:

$$\begin{aligned} p_1 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} &= \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} p_1^{1-\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\, p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \\ &= \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\, p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}. \end{aligned}$$

De forma análoga, el segundo término da:

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\, p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}.$$

Ambos comparten el factor $p_1^{\alpha/(\alpha+\beta)}\, p_2^{\beta/(\alpha+\beta)}$. Definiendo:

$$K(\alpha, \beta) \;=\; \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}},$$

obtenemos:

Función de gasto — Cobb-Douglas

$$e(p_1, p_2, \bar{u}) = K(\alpha, \beta)\, \bar{u}^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\, p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\, p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}.$$

Ejercicio 3.1. Verifique que cuando $\alpha + \beta = 1$, la constante se simplifica a $K(\alpha, \beta) = \alpha^{-\alpha}\, \beta^{-\beta}$ y la función de gasto toma la forma:

$$e(p_1, p_2, \bar{u}) = \bar{u}\, \alpha^{-\alpha}\, \beta^{-\beta}\, p_1^{\alpha}\, p_2^{\beta}.$$

Sugerencia: sustituya $\beta = 1 - \alpha$ en la expresión de K y simplifique.

3.6 Interpretación económica

La función de gasto es creciente en ambos precios y en el nivel de utilidad objetivo. Además, es **cóncava** en precios (ver PD3) y **homogénea de grado uno** en (p_1, p_2): si ambos precios se duplican, el gasto mínimo se duplica.

Las demandas hicksianas $h_i(\cdot)$ tienen pendiente negativa en su propio precio (ley de la demanda compensada) y positiva en el otro precio (los bienes son sustitutos netos en este contexto).

3.7 Verificación del Lema de Shepard

El Lema de Shepard afirma que $\partial e/\partial p_i = h_i$. Verifiquemos para p_1:

$$\frac{\partial e}{\partial p_1} = K(\alpha, \beta)\, \bar{u}^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\, \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\, p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}-1}\, p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} = K(\alpha, \beta)\, \bar{u}^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\, \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\, p_1^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\, p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}.$$

Comparemos con h_1:

$$h_1 = \bar{u}^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} p_1^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\, p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}.$$

Para que la verificación sea completa, debemos comprobar que $K(\alpha, \beta) \cdot \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta/(\alpha+\beta)}$. Esto se verifica expandiendo K y simplificando, lo cual confirma el resultado. La verificación para p_2 es simétrica.

Lema de Shepard verificado — Cobb-Douglas

$$\frac{\partial e}{\partial p_1} = h_1(p_1, p_2, \bar{u}), \qquad \frac{\partial e}{\partial p_2} = h_2(p_1, p_2, \bar{u}). \checkmark$$

3.8 Figura: curvas de indiferencia Cobb-Douglas

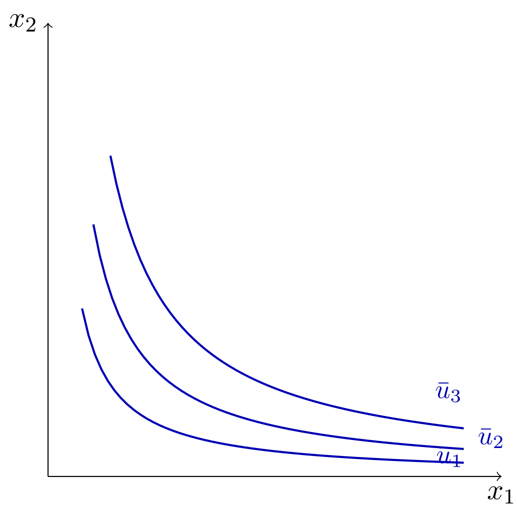

Figura 2: Curvas de indiferencia Cobb-Douglas: convexas, suaves, y que no tocan los ejes.

4 Caso CES con dos bienes

4.1 La función de utilidad CES

La función de utilidad con **elasticidad de sustitución constante** (CES) se define como:

$$u(x_1, x_2) = \left(\alpha\, x_1^\rho + \beta\, x_2^\rho\right)^{1/\rho},$$

donde $\alpha, \beta > 0$ son pesos y $\rho \leq 1$, $\rho \neq 0$, es el parámetro de sustitución.

¿Qué representa ρ?

(Para un tratamiento más detallado de la siguiente cuestión, ver Chávez y Gallardo 2025, capítulo 10.2.)

El parámetro ρ controla la **elasticidad de sustitución** entre los bienes, definida como $\sigma = 1/(1-\rho)$.

- $\rho \to 1$: los bienes se vuelven sustitutos perfectos ($\sigma \to \infty$).
- $\rho \to 0$: la función se aproxima a la Cobb-Douglas ($\sigma = 1$).
- $\rho \to -\infty$: los bienes se vuelven complementos perfectos ($\sigma \to 0$).

Condiciones para preferencias bien comportadas

Para que las preferencias sean monótonas y estrictamente convexas (curvas de indiferencia convexas al origen), requerimos $\rho < 1$ con $\rho \neq 0$, y $\alpha, \beta > 0$. Bajo estas condiciones, la función es estrictamente cuasi-cóncava.

¿Por qué la solución es interior?

Consideremos el caso $0 < \rho < 1$. Aquí la utilidad marginal de cada bien es:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \gamma_i\, x_i^{\rho-1} \left(\alpha x_1^\rho + \beta x_2^\rho\right)^{1/\rho - 1}.$$

Como $\rho - 1 < 0$, cuando $x_i \to 0^+$ se tiene $x_i^{\rho-1} \to +\infty$. Esta es la condición de Inada: la utilidad marginal "explota" cerca del origen, haciendo infinitamente valioso comprar las primeras unidades de cada bien. El mismo argumento aplica cuando $\rho < 0$. En ambos casos, la tangencia con la recta de isocosto ocurre en el interior y el óptimo satisface $x_1^*, x_2^* > 0$.

4.2 Lagrangiano y CPO

El problema es:

$$\min_{x_1, x_2 > 0}\; p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad \text{s.a.} \quad \left(\alpha\, x_1^\rho + \beta\, x_2^\rho\right)^{1/\rho} = \bar{u}.$$

El lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \lambda \Big[\bar{u} - \left(\alpha\, x_1^\rho + \beta\, x_2^\rho\right)^{1/\rho}\Big].$$

Denotemos $S \equiv \alpha\, x_1^\rho + \beta\, x_2^\rho$. Entonces $u = S^{1/\rho}$ y la derivada de u respecto a x_i es:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho}\, S^{1/\rho - 1} \cdot \rho\, \gamma_i\, x_i^{\rho-1} = S^{1/\rho-1}\, \gamma_i\, x_i^{\rho-1},$$

donde $\gamma_1 = \alpha$ y $\gamma_2 = \beta$.

Las CPO son:

$$p_1 = \lambda\, S^{1/\rho-1}\, \alpha\, x_1^{\rho-1} = \lambda \left(\alpha x_1^\rho + \beta x_2^\rho\right)^{1/\rho-1} \alpha\, x_1^{\rho-1}, \tag{5}$$

$$p_2 = \lambda\, S^{1/\rho-1}\, \beta\, x_2^{\rho-1} = \lambda \left(\alpha x_1^\rho + \beta x_2^\rho\right)^{1/\rho-1} \beta\, x_2^{\rho-1}. \tag{6}$$

4.3 Derivación de las demandas hicksianas (paso a paso)

Paso 1: Obtener la relación entre x_1 y x_2. Dividimos (5) entre (6). Los factores λ y $S^{1/\rho-1}$ se cancelan:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha\, x_1^{\rho-1}}{\beta\, x_2^{\rho-1}} = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\rho-1}. \tag{7}$$

Paso 2: Despejar la razón x_1/x_2. Despejando de (7):

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\rho-1} = \frac{\beta\, p_1}{\alpha\, p_2}.$$

Elevamos ambos lados a la potencia $\frac{1}{\rho-1}$. Como $\frac{1}{\rho-1} = -\frac{1}{1-\rho} = -\sigma$:

$$\frac{x_1}{x_2} = \left(\frac{\beta\, p_1}{\alpha\, p_2}\right)^{1/(\rho-1)} = \left(\frac{\beta\, p_1}{\alpha\, p_2}\right)^{-\sigma} = \left(\frac{\alpha\, p_2}{\beta\, p_1}\right)^{\sigma}.$$

Por lo tanto:

$$x_1 = x_2\left(\frac{\alpha\, p_2}{\beta\, p_1}\right)^{\sigma}, \quad \text{donde } \sigma = \frac{1}{1-\rho}. \tag{8}$$

Paso 3: Calcular x_1^ρ en términos de x_2. De (8):

$$x_1^\rho = x_2^\rho\left(\frac{\alpha\, p_2}{\beta\, p_1}\right)^{\sigma\rho}.$$

Calculemos $\sigma\rho$. Como $\sigma = 1/(1-\rho)$:

$$\sigma\rho = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Paso 4: Sustituir en la restricción. La restricción $S = \bar{u}^\rho$ queda:

$$\alpha\, x_2^\rho\left(\frac{\alpha\, p_2}{\beta\, p_1}\right)^{\rho/(1-\rho)} + \beta\, x_2^\rho = \bar{u}^\rho.$$

Factorizamos x_2^ρ:

$$x_2^\rho\left[\alpha\left(\frac{\alpha\, p_2}{\beta\, p_1}\right)^{\rho/(1-\rho)} + \beta\right] = \bar{u}^\rho. \tag{9}$$

Paso 5: Simplificar el corchete. Trabajemos el primer sumando. Notemos que $1 + \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{1-\rho+\rho}{1-\rho} = \frac{1}{1-\rho} = \sigma$. Por lo tanto:

$$\alpha\left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1}\right)^{\rho/(1-\rho)} = \alpha^{1+\rho/(1-\rho)}\,\beta^{-\rho/(1-\rho)}\,p_2^{\rho/(1-\rho)}\,p_1^{-\rho/(1-\rho)} = \alpha^\sigma\,\beta^{-\rho/(1-\rho)}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\rho/(1-\rho)}.$$

Ahora, $-\frac{\rho}{1-\rho} = 1-\sigma$ (pues $1-\sigma = 1-\frac{1}{1-\rho} = \frac{-\rho}{1-\rho}$). Además, $\frac{\rho}{1-\rho} = \sigma - 1$. Entonces:

$$= \alpha^\sigma\,\beta^{1-\sigma}\,p_2^{\sigma-1}\,p_1^{1-\sigma} = \alpha^\sigma\,\beta^{1-\sigma}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1-\sigma}.$$

Para el segundo sumando escribimos $\beta = \beta^\sigma \cdot \beta^{1-\sigma}$. Factorizamos $\beta^{1-\sigma}$ de ambos:

$$\beta^{1-\sigma}\left[\alpha^\sigma\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1-\sigma} + \beta^\sigma\right].$$

Multiplicamos y dividimos por $p_2^{1-\sigma}$:

$$= \frac{\beta^{1-\sigma}}{p_2^{1-\sigma}} \left[\alpha^\sigma\, p_1^{1-\sigma} + \beta^\sigma\, p_2^{1-\sigma}\right].$$

Paso 6: Despejar x_2. Sustituyendo en (9):

$$x_2^\rho = \frac{\bar{u}^\rho\, p_2^{1-\sigma}}{\beta^{1-\sigma}\left[\alpha^\sigma p_1^{1-\sigma} + \beta^\sigma p_2^{1-\sigma}\right]}.$$

Definamos $P \equiv \alpha^\sigma p_1^{1-\sigma} + \beta^\sigma p_2^{1-\sigma}$. Tomamos la potencia $1/\rho$ en ambos lados. Necesitamos $\frac{1-\sigma}{\rho}$:

$$\frac{1-\sigma}{\rho} = \frac{-\rho/(1-\rho)}{\rho} = \frac{-1}{1-\rho} = -\sigma.$$

Además, $-1/\rho = -\sigma/(\sigma-1) = \sigma/(1-\sigma)$. Entonces:

$$x_2 = \bar{u}\, \beta^{-(1-\sigma)/\rho}\, p_2^{(1-\sigma)/\rho}\, P^{-1/\rho} = \bar{u}\, \beta^\sigma\, p_2^{-\sigma}\, P^{\sigma/(1-\sigma)}.$$

Por simetría (intercambiando $\alpha \leftrightarrow \beta$ y $p_1 \leftrightarrow p_2$), obtenemos x_1:

Demandas hicksianas — CES

La demanda hicksiana del bien i ($\gamma_1 = \alpha$, $\gamma_2 = \beta$, $\sigma = 1/(1-\rho)$) es:

$$h_i(p_1, p_2, \bar{u}) = \bar{u}\, \gamma_i^\sigma\, p_i^{-\sigma}\, P^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}, \quad P \equiv \alpha^\sigma\, p_1^{1-\sigma} + \beta^\sigma\, p_2^{1-\sigma}.$$

Explícitamente:

$$h_1 = \bar{u}\, \alpha^\sigma\, p_1^{-\sigma}\, P^{\sigma/(1-\sigma)}, \qquad h_2 = \bar{u}\, \beta^\sigma\, p_2^{-\sigma}\, P^{\sigma/(1-\sigma)}.$$

4.4 Derivación de la función de gasto (paso a paso)

Paso 1: Calcular $p_i h_i$.

$$p_i\, h_i = \bar{u}\, \gamma_i^\sigma\, p_i^{1-\sigma}\, P^{\sigma/(1-\sigma)}.$$

Paso 2: Sumar.

$$e = p_1 h_1 + p_2 h_2 = \bar{u}\, P^{\sigma/(1-\sigma)}\left(\alpha^\sigma p_1^{1-\sigma} + \beta^\sigma p_2^{1-\sigma}\right) = \bar{u}\, P^{\sigma/(1-\sigma)} \cdot P.$$

Paso 3: Juntar potencias de P.

$$P^{\sigma/(1-\sigma)} \cdot P^1 = P^{\sigma/(1-\sigma)+1}.$$

Paso 4: Simplificar el exponente.

$$\frac{\sigma}{1-\sigma} + 1 = \frac{\sigma + 1 - \sigma}{1-\sigma} = \frac{1}{1-\sigma}.$$

Función de gasto — CES

$$e(p_1, p_2, \bar{u}) = \bar{u} \cdot \left(\alpha^\sigma\, p_1^{1-\sigma} + \beta^\sigma\, p_2^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}.$$

4.5 Interpretación económica

La función de gasto CES es **homogénea de grado uno** en precios (ver curso). El exponente $1/(1-\sigma)$ refleja cómo la facilidad de sustitución entre bienes afecta la sensibilidad del gasto a cambios en precios. Cuando σ es alta (bienes muy sustituibles), el consumidor puede "escapar" de un precio alto reasignando su gasto al bien más barato, y el gasto crece menos ante un aumento de precios. Cuando σ es baja (bienes poco sustituibles), el consumidor queda "atrapado" y el gasto es más sensible.

4.6 Verificación del Lema de Shepard

Denotemos $P \equiv \alpha^\sigma p_1^{1-\sigma} + \beta^\sigma p_2^{1-\sigma}$. Entonces $e = \bar{u} \cdot P^{1/(1-\sigma)}$.

Derivamos respecto a p_1 usando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial e}{\partial p_1} = \bar{u} \cdot \frac{1}{1-\sigma} P^{1/(1-\sigma)-1} \cdot \frac{\partial P}{\partial p_1}.$$

Ahora, $\partial P/\partial p_1 = \alpha^\sigma (1-\sigma)\, p_1^{-\sigma}$. Sustituyendo:

$$\frac{\partial e}{\partial p_1} = \bar{u} \cdot \frac{1}{1-\sigma} P^{1/(1-\sigma)-1} \cdot \alpha^\sigma (1-\sigma)\, p_1^{-\sigma} = \bar{u}\, \alpha^\sigma\, p_1^{-\sigma}\, P^{1/(1-\sigma)-1}.$$

Finalmente, $\frac{1}{1-\sigma} - 1 = \frac{1-1+\sigma}{1-\sigma} = \frac{\sigma}{1-\sigma}$. Por lo tanto:

$$\frac{\partial e}{\partial p_1} = \bar{u}\, \alpha^\sigma\, p_1^{-\sigma}\, P^{\sigma/(1-\sigma)} = h_1.$$

Lema de Shepard verificado — CES

$$\frac{\partial e}{\partial p_i} = h_i(p_1, p_2, \bar{u}) \checkmark$$

4.7 Figura: curvas de indiferencia CES

5 Caso Leontief

5.1 La función de utilidad

La función de utilidad Leontief modela **complementos perfectos**:

$$u(x_1, x_2) = \min\{a\, x_1,\ b\, x_2\}, \quad a, b > 0.$$

5.2 Interpretación económica

Los bienes deben consumirse en una proporción fija $x_1/x_2 = b/a$ para que ambos "ingredientes" se aprovechen plenamente. Ejemplos clásicos: zapatos izquierdos y derechos ($a = b = 1$), o café y azúcar en proporciones fijas.

Si $ax_1 > bx_2$, hay exceso de bien 1 que no genera utilidad adicional; toda la utilidad viene determinada por bx_2, el "cuello de botella".

5.3 ¿Por qué no se usa el Lagrangiano?

La función $\min\{\cdot\}$ **no es diferenciable** en el punto donde $ax_1 = bx_2$ (el vértice de la curva de indiferencia). Por lo tanto, no podemos calcular derivadas parciales ni plantear CPO en el sentido usual. En su lugar, resolvemos el problema directamente usando la estructura del problema.

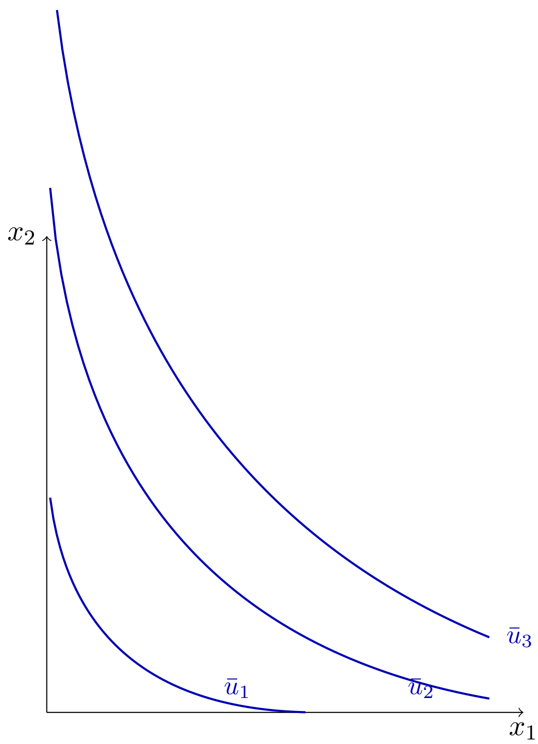

Figura 3: Curvas de indiferencia CES con $\rho = 0.5$ ($\sigma = 2$): menos curvadas que las Cobb-Douglas, reflejando mayor sustituibilidad. Nótese que tocan los ejes.

5.4 Resolución directa

Paso 1. En el óptimo, no conviene desperdiciar dinero comprando más de un bien del necesario. Esto ocurre cuando:

$$a\,x_1 = b\,x_2 = \bar{u}.$$

Si $ax_1 > bx_2$, podríamos reducir x_1 (ahorrando dinero) sin reducir la utilidad. Si $ax_1 < bx_2$, podríamos reducir x_2. Por tanto, en el óptimo ambos argumentos del mínimo son iguales e iguales a $\bar{u}$.

Paso 2. De $ax_1 = \bar{u}$ se obtiene $x_1 = \bar{u}/a$. De $bx_2 = \bar{u}$ se obtiene $x_2 = \bar{u}/b$.

Demandas hicksianas — Leontief

$$h_1(p_1, p_2, \bar{u}) = \frac{\bar{u}}{a}, \qquad h_2(p_1, p_2, \bar{u}) = \frac{\bar{u}}{b}.$$

Nótese algo muy importante: las demandas hicksianas $h_i(\cdot)$ **no dependen de los precios**. Esto es lógico: como los bienes son complementos perfectos, no hay posibilidad de sustitución. El consumidor siempre necesita la misma proporción, sin importar cuánto cuesten.

5.5 Función de gasto

$$e = p_1h_1 + p_2h_2 = p_1 \cdot \frac{\bar{u}}{a} + p_2 \cdot \frac{\bar{u}}{b} = \bar{u}\left(\frac{p_1}{a} + \frac{p_2}{b}\right).$$

Función de gasto — Leontief

$$e(p_1, p_2, \bar{u}) = \bar{u}\left(\frac{p_1}{a} + \frac{p_2}{b}\right).$$

La función de gasto es **lineal** en los precios. Esto tiene sentido: como no hay sustitución, un aumento en cualquier precio se traslada completamente al gasto.

5.6 Verificación del Lema de Shepard

$$\frac{\partial e}{\partial p_1} = \frac{\bar{u}}{a} = h_1, \qquad \frac{\partial e}{\partial p_2} = \frac{\bar{u}}{b} = h_2.$$

Lema de Shepard verificado — Leontief

$$\frac{\partial e}{\partial p_i} = h_i \checkmark$$

Nótese que en este caso la verificación es directa: la función de gasto es diferenciable en los precios (es lineal) a pesar de que la función de utilidad no es diferenciable en el vértice.

5.7 Figura: curvas de indiferencia Leontief

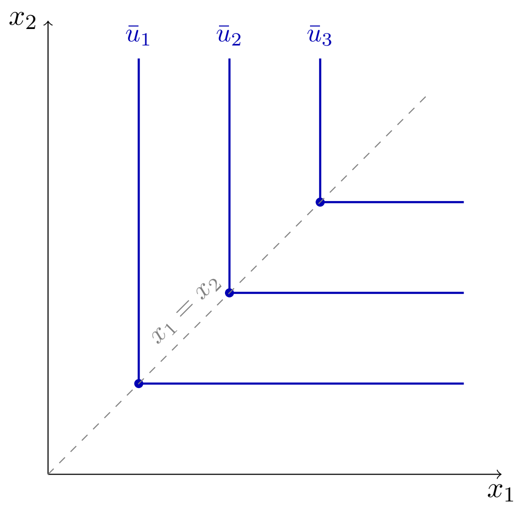

Figura 4: Curvas de indiferencia Leontief ($a = b = 1$): forma de L con vértice sobre la diagonal.

6 Caso lineal (sustitutos perfectos)

6.1 La función de utilidad

$$u(x_1, x_2) = a\,x_1 + b\,x_2, \quad a, b > 0.$$

6.2 Interpretación económica

El consumidor puede sustituir un bien por el otro a una tasa constante a/b. No importa la composición de la canasta: una unidad de bien 1 siempre "vale" a/b unidades de bien 2 en términos de utilidad.

6.3 Forma de las curvas de indiferencia

Las curvas de indiferencia son rectas con pendiente $-a/b$:

$$ax_1 + bx_2 = \bar{u} \quad \Longleftrightarrow \quad x_2 = \frac{\bar{u}}{b} - \frac{a}{b}\,x_1.$$

6.4 ¿Por qué aparecen soluciones de esquina?

La recta de isocosto tiene pendiente $-p_1/p_2$ y las curvas de indiferencia tienen pendiente $-a/b$. Como ambas son rectas, generalmente **no son tangentes** (a menos que tengan exactamente la misma pendiente). En consecuencia:

- Si $a/b > p_1/p_2$ (equivalentemente, $a/p_1 > b/p_2$): la curva de indiferencia es "más empinada" que la recta de isocosto. Es más eficiente comprar solo bien 1.
- Si $a/b < p_1/p_2$ (equivalentemente, $a/p_1 < b/p_2$): es más eficiente comprar solo bien 2.
- Si $a/b = p_1/p_2$: las rectas son paralelas y cualquier punto sobre la curva de indiferencia es óptimo.

El criterio se interpreta así: a/p_1 es la "utilidad marginal por unidad monetaria" gastada en bien 1, y b/p_2 es la misma magnitud para bien 2. El consumidor gasta todo en el bien que le da más utilidad por sol invertido.

6.5 Demandas hicksianas

Demandas hicksianas — Lineal

$$(h_1, h_2) = \begin{cases} \left(\dfrac{\bar{u}}{a},\ 0\right) & \text{si } \dfrac{a}{p_1} > \dfrac{b}{p_2}, \\ \left(0,\ \dfrac{\bar{u}}{b}\right) & \text{si } \dfrac{a}{p_1} < \dfrac{b}{p_2}, \\ \text{cualquier } (x_1, x_2) \text{ con } ax_1 + bx_2 = \bar{u} & \text{si } \dfrac{a}{p_1} = \dfrac{b}{p_2}. \end{cases}$$

En el tercer caso, la demanda hicksiana **no es única**: el consumidor es indiferente entre todas las canastas sobre la curva de indiferencia, porque todas cuestan lo mismo.

6.6 Función de gasto

Función de gasto — Lineal

$$e(p_1, p_2, \bar{u}) = \bar{u} \cdot \min\left\{\frac{p_1}{a},\ \frac{p_2}{b}\right\}.$$

La lógica es clara: el consumidor elige el bien que le permite alcanzar $\bar{u}$ al menor costo por unidad de utilidad. El costo de obtener una unidad de utilidad vía bien 1 es p_1/a, y vía bien 2 es p_2/b. El gasto total es $\bar{u}$ multiplicado por el menor de estos costos unitarios.

6.7 Verificación del Lema de Shepard

Cuando $p_1/a < p_2/b$ (se consume solo bien 1):

$$e = \bar{u} \cdot \frac{p_1}{a}, \qquad \frac{\partial e}{\partial p_1} = \frac{\bar{u}}{a} = h_1, \qquad \frac{\partial e}{\partial p_2} = 0 = h_2. \quad \checkmark$$

Cuando $p_1/a > p_2/b$ (se consume solo bien 2):

$$e = \bar{u} \cdot \frac{p_2}{b}, \qquad \frac{\partial e}{\partial p_1} = 0 = h_1, \qquad \frac{\partial e}{\partial p_2} = \frac{\bar{u}}{b} = h_2. \quad \checkmark$$

Lema de Shepard verificado — Lineal

En cada región donde e es diferenciable, el lema se cumple. En el punto $p_1/a = p_2/b$, la función de gasto tiene un "quiebre" (no es diferenciable) y la demanda hicksiana no es única, lo cual es consistente: el subdiferencial de e en ese punto coincide con el conjunto de demandas óptimas.

6.8 Figura: caso lineal con solución de esquina

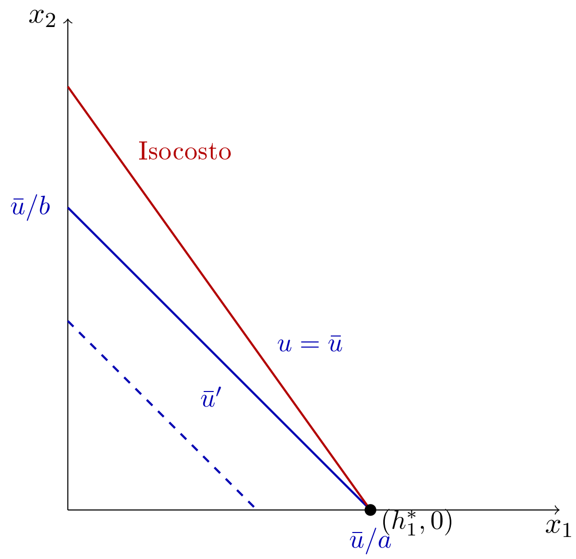

Figura 5: Sustitutos perfectos: cuando la recta de isocosto es más empinada que la curva de indiferencia, la solución es de esquina sobre el eje x_1.

7 Comparación entre los cuatro casos

La siguiente tabla resume las principales diferencias entre las cuatro especificaciones de preferencias estudiadas.

Característica	**Cobb-Douglas**	**CES**	**Leontief**	**Lineal**
Curvas de indif.	Convexas	Convexas	En L	Rectas
Solución interior	Siempre	Siempre*	Vértice	Esquina (gral.)
Sustitución (σ)	$= 1$	Variable	$= 0$	$= \infty$
h_i depende de p	Sí	Sí	No	Sí (por tramos)
e en precios	Cobb-Douglas	CES	Lineal	Mínimo
Diferenciabilidad u	Sí	Sí	No (vértice)	Sí

Tabla 1: Comparación de los cuatro casos. *Para $\rho < 1$, $\rho \neq 0$.

Algunas observaciones adicionales:

La **Cobb-Douglas** es un caso particular de la CES (con $\rho \to 0$). La facilidad de sustitución es intermedia: ni perfecta ni nula. El gasto siempre se reparte en ambos bienes, en una proporción que depende de los exponentes.

En la **CES**, el parámetro ρ (o equivalentemente σ) permite calibrar la curvatura de las curvas de indiferencia. Es el modelo más flexible de los cuatro.

En el caso **Leontief**, la imposibilidad de sustituir hace que las demandas sean rígidas: independientes de los precios. La función de gasto es lineal en precios, reflejando esta rigidez.

En el caso **lineal**, la sustituibilidad perfecta lleva a soluciones extremas: todo el gasto se concentra en un solo bien (salvo en el caso de empate). La función de gasto toma la forma de un mínimo.

8 Lema de Shepard

8.1 Enunciado formal

Lema 8.1 (Lema de Shepard)**.** *Sea $e(p_1, p_2, \bar{u})$ la función de gasto asociada al problema de minimización del gasto, y sean $h_1(\cdot), h_2(\cdot)$ las demandas hicksianas. Si e es diferenciable en (p_1, p_2), entonces:*

$$\frac{\partial e(p_1, p_2, \bar{u})}{\partial p_i} = h_i(p_1, p_2, \bar{u}), \quad i = 1, 2.$$

8.2 Interpretación intuitiva

El Lema de Shepard dice que si el precio del bien i sube marginalmente, el incremento en el gasto mínimo es (aproximadamente) igual a la cantidad que ya se estaba comprando de ese bien. La intuición es que, ante un cambio infinitesimal de precio, el consumidor no cambia su canasta (el efecto sustitución es de *segundo orden*), y el cambio en el gasto proviene únicamente del hecho de que las mismas unidades ahora cuestan un poco más.

8.3 Demostración usando el Teorema de la Envolvente

La prueba se basa en el Teorema de la Envolvente (ver Anexo A). Presentamos aquí la derivación explícita con regla de la cadena para dos bienes.

Demostración. El lagrangiano del problema de minimización del gasto es:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda; p_1, p_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \lambda\big(\bar{u} - u(x_1, x_2)\big).$$

En el óptimo, la restricción se satisface con igualdad, $u(h_1^*, h_2^*) = \bar{u}$, por lo que:

$$e(p_1, p_2, \bar{u}) = p_1 h_1^* + p_2 h_2^* = \mathcal{L}(h_1^*, h_2^*, \lambda^*; p_1, p_2).$$

Las demandas hicksianas h_1^*, h_2^* y el multiplicador λ^* son funciones de los precios. Derivamos e respecto a p_1 aplicando la **regla de la cadena completa**:

$$\frac{de}{dp_1} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}\frac{\partial h_1^*}{\partial p_1}}_{\text{(I)}} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}\frac{\partial h_2^*}{\partial p_1}}_{\text{(II)}} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda^*}{\partial p_1}}_{\text{(III)}} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_1}}_{\text{(IV)}}. \tag{10}$$

Ahora usamos las **CPO** del problema, que se cumplen en el óptimo:

$$\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}\right|^* = p_1 - \lambda^* \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \qquad \Longrightarrow \quad \text{el término (I) se anula,}$$

$$\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}\right|^* = p_2 - \lambda^* \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \qquad \Longrightarrow \quad \text{el término (II) se anula,}$$

$$\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\right|^* = \bar{u} - u(h_1^*, h_2^*) = 0 \qquad \Longrightarrow \quad \text{el término (III) se anula.}$$

Por lo tanto, en (10) solo sobrevive el efecto directo (IV):

$$\frac{de}{dp_1} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_1}\bigg|^* = \frac{\partial}{\partial p_1}(p_1 x_1 + p_2 x_2)\bigg|_{x_1 = h_1^*} = h_1^*.$$

$$\boxed{\frac{\partial e}{\partial p_1} = h_1(p_1, p_2, \bar{u}).}$$

La derivación respecto a p_2 es completamente análoga y produce $\partial e/\partial p_2 = h_2$. □

A Anexo: Teorema de la Envolvente

A.1 Enunciado

Teorema A.1 (Teorema de la Envolvente). *Considere el problema de optimización:*

$$V(\theta) = \min_x \ f(x, \theta) \quad \textit{sujeto a} \quad g(x, \theta) \geq 0,$$

donde θ es un parámetro. Sea $x^*(\theta)$ la solución óptima y $\lambda^*(\theta)$ el multiplicador de Lagrange óptimo. Si f y g son diferenciables, entonces:

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}\bigg|_{x = x^*(\theta),\, \lambda = \lambda^*(\theta)},$$

donde $\mathcal{L}(x, \lambda, \theta) = f(x, \theta) - \lambda\, g(x, \theta)$ es el lagrangiano.

A.2 Demostración (caso con dos variables de decisión)

Trabajemos con dos variables de decisión x_1, x_2 para mantener la cercanía con nuestro problema. El lagrangiano es:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda, \theta) = f(x_1, x_2, \theta) - \lambda\, g(x_1, x_2, \theta).$$

El valor óptimo es $V(\theta) = f\big(x_1^*(\theta), x_2^*(\theta), \theta\big)$, donde x_1^*, x_2^* son las soluciones óptimas que *dependen* de θ. Además, en el óptimo la restricción se cumple con igualdad: $g(x_1^*, x_2^*, \theta) = 0$. Por lo tanto podemos escribir:

$$V(\theta) = f(x_1^*, x_2^*, \theta) - \lambda^* \underbrace{g(x_1^*, x_2^*, \theta)}_{=0} = \mathcal{L}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*, \theta).$$

Paso 1: Derivada total con regla de la cadena. Diferenciamos $V(\theta)$ respecto a θ, recordando que x_1^*, x_2^* y λ^* son funciones de θ:

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}\frac{dx_1^*}{d\theta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}\frac{dx_2^*}{d\theta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\frac{d\lambda^*}{d\theta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}. \tag{11}$$

Aquí aparecen **cuatro términos**: tres efectos indirectos (cómo cambian las variables óptimas cuando θ varía) y un efecto directo (cómo cambia el lagrangiano directamente con θ).

Paso 2: Las CPO anulan los efectos indirectos. En el óptimo se cumplen las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}\bigg|^* = \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}\bigg|^* = \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\bigg|^* = -g(x_1^*, x_2^*, \theta) = 0. \tag{14}$$

Sustituyendo (12), (13) y (14) en (11):

$$\frac{dV}{d\theta} = \underbrace{\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}\right|^*}_{=0} \frac{dx_1^*}{d\theta} + \underbrace{\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}\right|^*}_{=0} \frac{dx_2^*}{d\theta} + \underbrace{\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\right|^*}_{=0} \frac{d\lambda^*}{d\theta} + \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}\right|^*.$$

Los tres primeros términos se anulan gracias a las CPO. Queda únicamente:

$$\boxed{\frac{dV}{d\theta} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}\right|_{x^*,\lambda^*}.}$$

A.3 Explicación intuitiva

La idea es simple pero poderosa: para calcular cómo cambia el valor óptimo ante un cambio en un parámetro, **no necesitamos saber cómo cambia la solución óptima**. Los ajustes $dx_i^*/d\theta$ están multiplicados por coeficientes que son cero en el óptimo (las CPO), así que se anulan. Solo sobrevive el efecto *directo* del parámetro sobre el lagrangiano.

Dicho de otro modo: en el óptimo, los efectos de reoptimización son de segundo orden. Lo que importa para el cambio de primer orden en V es solamente cómo θ afecta directamente la función objetivo y la restricción.

Fin del documento