El Lagrangiano en optimización restringida: ¿por qué “$+\lambda$” o “$-\lambda$”?

El teorema clásico, la geometría de los gradientes,
y los problemas de max utilidad y mín gasto

El teorema de Lagrange en $\mathbb{R}^n$

Consideremos:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \qquad \text{s.a.} \qquad g(x) \leq 0$$

Condiciones de Karush–Kuhn–Tucker (KKT)

Si x^* es un mínimo y $\nabla g(x^*) \neq 0$, entonces existe $\lambda \geq 0$ tal que:

$$\nabla f(x^*) + \lambda\, \nabla g(x^*) = 0 \qquad \text{(estacionariedad)}$$

$$g(x^*) \leq 0 \qquad \text{(factibilidad)}$$

$$\lambda\, g(x^*) = 0 \qquad \text{(holgura complementaria)}$$

$$\lambda \geq 0 \qquad \text{(no negatividad)}$$

El Lagrangiano correspondiente es:

$$\boxed{\mathcal{L} = f(x) + \lambda\, g(x), \qquad \lambda \geq 0}$$

¿Por qué $+\lambda$ y no $-\lambda$?

No es convención. Es la única posibilidad geométricamente consistente con que x^* sea mínimo.

¿Por qué "$+\lambda$" en minimización?

Tres hechos sobre los gradientes

Hecho 1. $\nabla g(x^*)$ apunta hacia donde g crece, es decir, **hacia afuera** de la región factible $\{g \leq 0\}$.

Hecho 2. $\nabla f(x^*)$ apunta hacia donde f crece. Para minimizar, la dirección de mejora es $-\nabla f$.

Hecho 3 (clave). Si x^* es óptimo, la mejora $-\nabla f$ **no puede apuntar hacia adentro** de la región factible (si pudiera, bajarías f sin salirte: contradicción). Entonces $-\nabla f$ apunta **hacia afuera**, como ∇g:

$$-\nabla f = \mu \nabla g,\ \mu > 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla f + \mu \nabla g = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L} = f + \lambda g,\ \lambda \geq 0$$

La Figura 1 muestra esto en un diagrama "local": la frontera $g = 0$ es una línea, ∇g apunta hacia afuera (arriba), y ∇f apunta en dirección opuesta a ∇g (hacia adentro). La condición $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ con $\lambda > 0$ dice exactamente eso: son antiparalelos.

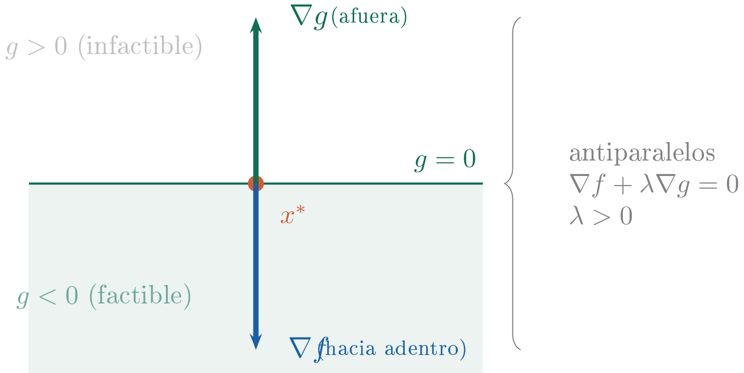

Figura 1: *

Figura 1. Minimización (vista local en x^*): ∇f apunta hacia adentro de la región factible, ∇g apunta hacia afuera. Son antiparalelos, lo que da $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ con $\lambda > 0$.

¿Qué pasaría con signo menos?

Si $\mathcal{L} = f - \lambda g$, la condición $\nabla \mathcal{L} = 0$ daría $\nabla f = \lambda \nabla g$: ambos apuntarían hacia afuera. Entonces $-\nabla f$ (la mejora) apuntaría hacia **adentro**. Podrías bajar f sin salir. Contradicción.

En una frase

El signo "+" codifica que **en un mínimo, descender te saca de la región factible**. La restricción te atrapa.

¿Y en maximización? El signo se invierte

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \qquad \text{s.a.} \qquad g(x) \leq 0$$

Ahora la mejora es $+\nabla f$ (ascenso). En el óptimo, $+\nabla f$ no puede apuntar hacia adentro, así que apunta hacia afuera como ∇g. Es decir, ∇f y ∇g son **paralelos** (misma dirección):

$$\nabla f = \mu\,\nabla g,\ \mu > 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla f - \mu\nabla g = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mathcal{L} = f - \lambda g,\ \lambda \geq 0}$$

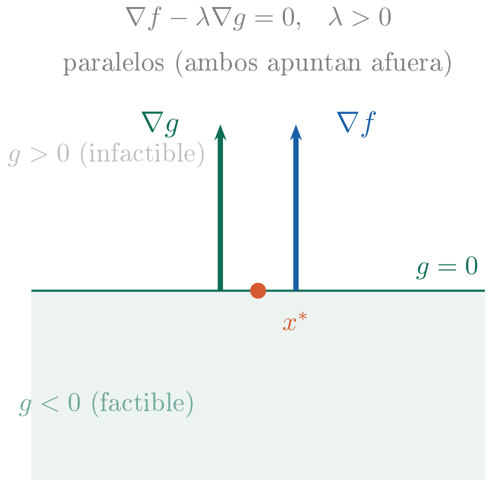

Figura 2: *

Figura 2. Maximización (vista local en x^*): ∇f y ∇g apuntan ambos hacia afuera (paralelos). Subir f te saca de la región factible. Esto da $\nabla f - \lambda\nabla g = 0$ con $\lambda > 0$.

Comparación

	Minimización	**Maximización**
Dirección de mejora	$-\nabla f$	$+\nabla f$
∇f vs ∇g	antiparalelos	paralelos
Condición	$\nabla f + \lambda\nabla g = 0$	$\nabla f - \lambda\nabla g = 0$
Lagrangiano	$\mathcal{L} = f + \lambda g$	$\mathcal{L} = f - \lambda g$

Regla práctica

En el óptimo, **mejorar te saca de la región factible**.

- **Min:** mejora $= -\nabla f$ apunta afuera $\Rightarrow$ ∇f apunta adentro $\Rightarrow$ "$+\lambda$"
- **Max:** mejora $= +\nabla f$ apunta afuera $\Rightarrow$ ∇f apunta afuera $\Rightarrow$ "$-\lambda$"

Ejemplo 1: maximización de utilidad

Problema

$$\max_{x,y}\ u(x,y) \qquad \text{s.a.} \qquad p_x x + p_y y \leq m$$

Paso 1: identificar f y g

General	Aquí
$f(x)$	$u(x,y)$
$g(x) \leq 0$	$p_x x + p_y y - m \leq 0$
∇f	$(u_x,\, u_y)$
∇g	$(p_x,\, p_y) = \mathbf{p}$

Paso 2: plantear el Lagrangiano

Es **maximización**: $\mathcal{L} = f - \lambda g$:

$$\mathcal{L} = u(x,y) - \lambda(p_x x + p_y y - m)$$

$$\boxed{\mathcal{L} = u(x,y) + \lambda(m - p_x x - p_y y), \qquad \lambda \geq 0}$$

Paso 3: CPO

$$u_x = \lambda\, p_x \tag{1}$$

$$u_y = \lambda\, p_y \tag{2}$$

$$p_x x + p_y y = m \tag{3}$$

Paso 4: tangencia

Dividiendo (1) entre (2): $\boxed{\dfrac{u_x}{u_y} = \dfrac{p_x}{p_y}}$ (TMS = relación de precios)

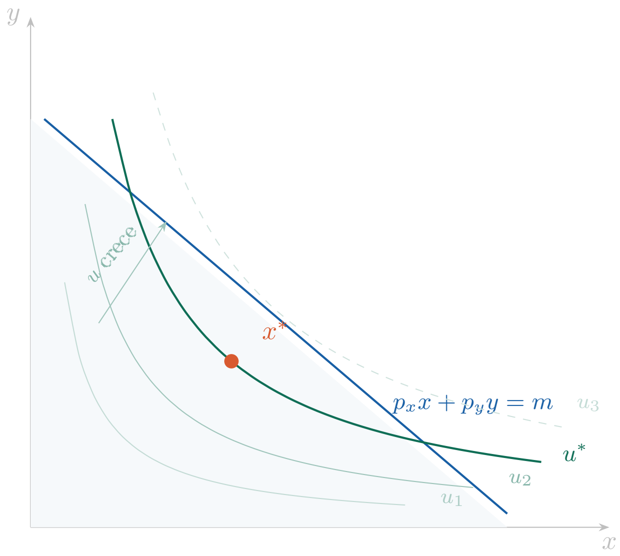

Figura 3: *

Figura 3. Max utilidad: se busca la curva de indiferencia más alta que toque la recta presupuestaria. En x^* son tangentes: misma pendiente $\Rightarrow u_x/u_y = p_x/p_y$.

Multiplicador

$\lambda = u_x/p_x = u_y/p_y = \partial v/\partial m$: la utilidad marginal del ingreso.

Ejemplo 2: minimización del gasto

Problema

$$\min_{x,y}\; p_x x + p_y y \qquad \text{s.a.} \qquad u(x,y) \geq \bar{u}$$

Paso 1: forma estándar

$u(x,y) \geq \bar{u} \;\Leftrightarrow\; \bar{u} - u(x,y) \leq 0.$

General	Aquí
$f(x)$	$p_x x + p_y y$
$g(x) \leq 0$	$\bar{u} - u(x,y) \leq 0$
∇f	$(p_x,\, p_y) = \mathbf{p}$
∇g	$(-u_x,\, -u_y) = -\nabla u$

Paso 2: plantear el Lagrangiano

Es **minimización**: $\mathcal{L} = f + \lambda g$:

$$\boxed{\mathcal{L} = p_x x + p_y y + \lambda(\bar{u} - u(x,y)), \qquad \lambda \geq 0}$$

Paso 3: CPO

$$p_x = \lambda\, u_x \tag{4}$$
$$p_y = \lambda\, u_y \tag{5}$$
$$u(x,y) = \bar{u} \tag{6}$$

Paso 4: tangencia

Dividiendo (4) entre (5): $\boxed{\dfrac{u_x}{u_y} = \dfrac{p_x}{p_y}}$ (misma condición que en max utilidad)

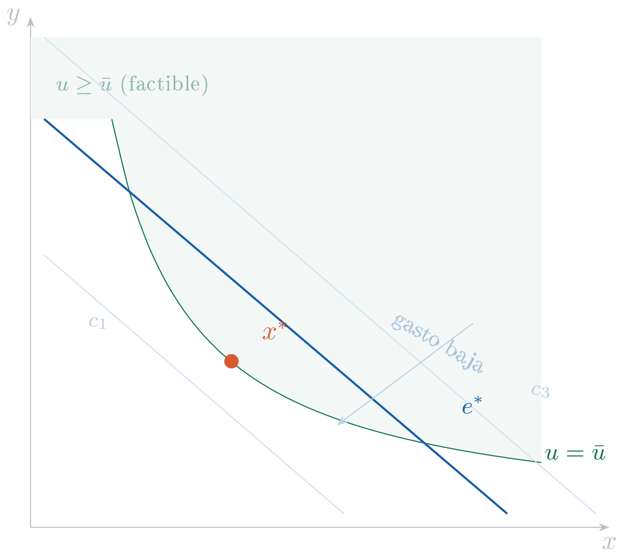

Figura 4: *

Figura 4. Min gasto: se busca la recta de isogasto más baja que toque la curva $u = \bar{u}$. En x^* son tangentes: misma pendiente $\Rightarrow u_x/u_y = p_x/p_y$.

Multiplicador

$\lambda = p_x/u_x = p_y/u_y = \partial e/\partial \bar{u}$: el costo marginal de la utilidad.

Relación entre multiplicadores

$\lambda_{\min} = 1/\lambda_{\max}$. El costo marginal de la utilidad es el recíproco de la utilidad marginal del ingreso.

Dualidad: dos problemas, un mismo punto

La correspondencia

	Max utilidad	**Min gasto**
Objetivo	$u(x,y)$	$p_x x + p_y y$
Restricción	$p_x x + p_y y \leq m$	$u(x,y) \geq \bar{u}$
Solución	Marshallianas $x^*(p,m)$	Hicksianas $h^*(p,\bar{u})$
Valor óptimo	$v(p,m)$	$e(p,\bar{u})$
Multiplicador	$\partial v/\partial m$	$\partial e/\partial \bar{u}$

Lo que es objetivo en un problema es restricción en el otro.

Identidades

Si $\bar{u} = v(p,m)$:

$$e(p, v(p,m)) = m \tag{7}$$
$$v(p, e(p,\bar{u})) = \bar{u} \tag{8}$$
$$x^*(p,m) = h^*(p, v(p,m)) \tag{9}$$

La geometría común

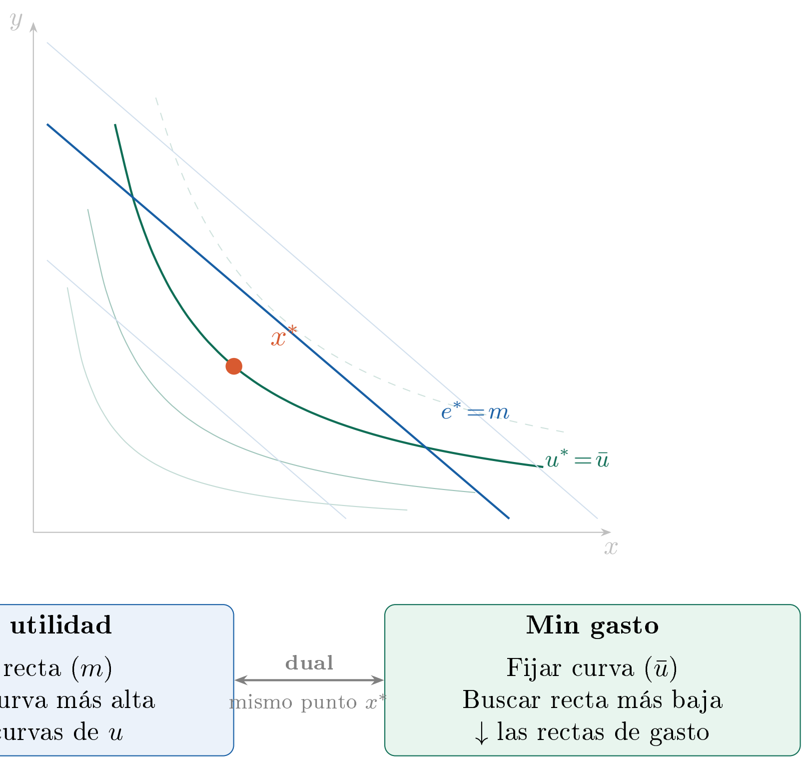

Figura 5: *

Figura 5. Dualidad: ambos problemas se resuelven en x^* (tangencia entre curva y recta). Max utilidad fija la recta y sube las curvas; min gasto fija la curva y baja las rectas.

Resumen: receta paso a paso

Cómo plantear el Lagrangiano correctamente

Paso 1. Escribir la restricción en la forma $g(x) \leq 0$.

Paso 2. Elegir el signo:

$$\mathcal{L} = \begin{cases} f + \lambda\, g & \text{si es } \textbf{minimización} \\ f - \lambda\, g & \text{si es } \textbf{maximización} \end{cases} \qquad \lambda \geq 0$$

Paso 3. Derivar $\mathcal{L}$ respecto a cada variable e igualar a cero.
Paso 4. Resolver el sistema.

¿Por qué funciona? Porque el signo garantiza que **en el óptimo, mejorar te obliga a violar la restricción**. Estás atrapado.

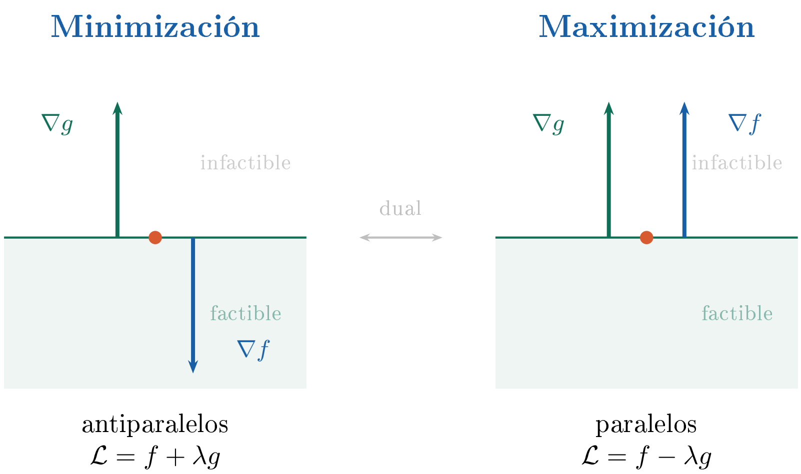

Figura 6: *
Figura 6. Resumen: en minimización ∇f y ∇g son antiparalelos (signo $+$); en maximización son paralelos (signo $-$).