Programación dinámica

Marcelo Gallardo

Diciembre 2022

Pontificia Universidad Católica del Perú

marcelo.gallardo@pucp.edu.pe

1. Introducción

Fue el matemático Richard Bellman quien inventó la programación dinámica en 1953. Esta última se utiliza para optimizar problemas complejos que pueden ser discretizados y secuencializados.

Las variables de interés en los problemas y resultados que serán abordados a continuación son esencialmente las siguientes:

1. La variable de estado $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, ..., N-1$.
2. La variable de control $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $k = 1, ..., N$.

La variable de control, tal y como su nombre lo indica, es una variable que puede ser controlada, modificada, afectada directamente. Por ejemplo, en el contexto de la economía, la inversión o el consumo. Por otro lado, la variable de estado, tal y como su nombre lo sugiere, es una variable que evoluciona, va cambiando de estado en estado. Este cambio, se rige por una dinámica (ecuación en diferencias)

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k), \ k = 0, 1, ..., N-1. \tag{1}$$

La función $f(\cdot)$, es una función arbitraria (no se le exige diferenciabilidad o continuidad), cuyo domino D yace en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \{0, ..., N-1\}$. En ese sentido, $f : D \to \mathbb{R}^n$. La ecuación (1) viene acompañada de una condición inicial $x_0 = x(0) =\in \mathbb{R}^n$.

Por otro lado, la variable de control u puede estar sujeta a ciertas restricciones, que puede incluso depender del periodo k. Matemáticamente,

$$u(k) \in \Omega(k) \subset \mathbb{R}^m.$$

Ejemplo 1. El consumo $c(k)$ de una persona es positivo pero acotado superiormente por su riqueza $x(k)$. Así,

$$c(k) =\in \Omega(k) = [0, x(k)] \subset \mathbb{R}.$$

Luego, en el contexto descrito previamente, definimos lo que se conoce como *funcional objetivo* J, el cual no es nada menos que la suma

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} F(x(k), u(k), k) + S(x(N))$$

con $F : D \to \mathbb{R}$ y $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Observación. *La función S se conoce como función de ponderación del estado final.*

Definición 2. Un control admisible es un control tal que $u(k) \in \Omega(k)$, $\forall\ 0 \leq k \leq N-1$.

Definición 3. Un control óptimo un control admisible que maximiza J.

El problema de optimización que busca resolverse es entonces

$$\mathcal{P}_D : \begin{cases} \text{máx}_{\{u(k)\}_{k=0}^{N-1}} & J = \sum_{k=0}^{N-1} F(x(k), u(k), k) + S(x(N)) \\ s.a. : & x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \\ & x(0) = x_0 \\ & u(k) \in \Omega(k),\ k = 0, 1, ..., N-1. \end{cases}$$

Definición 4. La secuencia $\pi = \{u^*(0), u^*(1), ..., u^*(N-1)\}$ se conoce como política óptima.

2. Fundamentos

A continuación, se exhibe una serie de resultados que serán de suma importancia a la hora de resolver el problema $\mathcal{P}_D$.

Proposición 1. *Para cualesquiera $j, r \in \{0, 1, ..., N-1\}$ con $j < r$, se verifica que $x(r)$ depende únicamente de $x(j)$, los periodos $k = j, ..., r-1$ y de los controles*

$$\{u(j), u(j+1), ..., u(r-1)\}.$$

Esto es, $x(r) = \Psi(x(j), \{u(k)\}_{k=j,\ldots,r}, \{k\}_{k=j,\ldots,r-1})$.

Demostración. Tenemos que

$$x(j+1) = f(x(j), u(j), j).$$

Luego,

$$x(j+2) = f(x(j+1), u(j+1), j+1) = f(f(x(j), u(j), j), u(j+1), j+1),$$

y así hasta obtener

$$\begin{aligned} x(r) &= f(x(r-1), u(r-1), r-1) \\ &= f(f(x(r-2), u(r-2), r-2), u(r-1), r-1) \\ &= \vdots \\ &= \Psi(x(j), u(j), u(j+1), ..., u(r-1), j, j+1, ..., r-1). \end{aligned}$$

□

Observación. *Dado x_0, los controles $\{u(0), u(1), ..., u(N-1)\}$ determinan completamente los estados. En ese sentido,*

$$J \triangleq J_0(x_0, \{u(0), u(1), ..., u(N-1)\}, k), \;\; k = 0, ..., N-1.$$

Lema 5. *Sean D y D' dos conjuntos arbitrarios. Sean g y h funciones cuyos dominios de definición son D y $D \times D'$ respectivamente. Entonces,*

$$\max_{(y,z)\in D\times D'} \{g(y) + h(y,z)\} = \max_{y\in D} \left\{ g(y) + \max_{z\in D'} \{h(y,z)\} \right\}.$$

Siempre y cuando la solución exista.

Demostración. Primero,

$$\max_{(y,z)\in D\times D'} \{g(y) + h(y,z)\} \geq g(y) + h(y,z), \;\; \forall\; (y,z) \in D\times D'.$$

En particular,

$$\max_{(y,z)\in D\times D'} \{g(y) + h(y,z)\} \geq g(y) + \max_{z\in D'} \{h(y,z)\}, \;\; \forall\; y \in D.$$

Así

$$\max_{(y,z)\in D\times D'} \{g(y) + h(y,z)\} \geq \max_{y\in D} \left\{ g(y) + \max_{z\in D'} \{h(y,z)\} \right\}.$$

Queda entonces por demostrar la otra desigualdad. Primero, $\forall\; y \in D$

$$h(y,z) \leq \max_{z\in D'} \{h(y,z)\}.$$

Luego,

$$g(y) + h(y,z) \leq g(y) + \max_{z\in D'}\{h(y,z)\} \leq \max_{y\in D}\left\{g(y) + \max_{z\in D'}\{h(y,z)\}\right\}.$$

Así

$$\max_{(y,z)\in D\times D'}\{g(y)+h(y,z)\} \leq \max_{y\in D}\left\{g(y) + \max_{z\in D'}\{h(y,z)\}\right\}.$$

$\square$

3. Algoritmo de programación dinámica

Enseguida, exhibiremos la primera estrategia cuyo fin es resolver el problema de optimización $\mathcal{P}_D$.

Teorema 6. *Sea $J^*(x_0)$ el valor óptimo del funcional objetivo del problema $\mathcal{P}_D$. Entonces,*

$$J^*(x_0) = J_0^*\{x_0\}$$

en donde la función J_0^* viene dada por el último paso del siguiente algoritmo:

$$\begin{aligned} J_N^*\{x(N)\} &= S[x(N)] \\ J_k^*\{x(k)\} &= \max_{u(k)\in\Omega(k)}\{F(x(k),u(k),k) + J_{k+1}^*\{f(x(k),u(k),k)\}\}. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se conocen como las ecuaciones de Bellman. Más aún, si $u^*(k)$ maximiza la expresión $F(x(k),u(k),k) + J_{k+1}^*\{f(x(k),u(k),k)\}$, entonces $u^*(k)$ es el control óptimo del problema.

Demostración. Por definición,

$$J^*(x_0) = \max_{u(0)\in\Omega(0),\ldots,u(N-1)\in\Omega(N-1)}\left\{\sum_{k=0}^{N-1} F(x(k),u(k),k) + S(x(N))\right\}.$$

Debido a la propiedad de causalidad (1) y el Lema (5), la suma puede descomponerse de la manera siguiente

$$J^*(x_0) = \max_{u(0)\in\Omega(0)}\left\{F(x(0),u(0),0) + \max_{\{u(k)\in\Omega(k)\}_{k=1}^{N-1}}\left\{\sum_{k=1}^{N-1} F(x(k),u(k),k) + S(x(N))\right\}\right\}. \tag{2}$$

En efecto, $u(0)$ juego el papel de y, $\Omega(0)$ el de D, $z = \{u(k)\}_{1\leq k\leq N-1}$ y $D' = \{\Omega(k)\}_{1\leq k\leq N-1}$. Volviendo a aplicar, sucesivamente, la Proposición (1) y el Lema (5) al término $\max_{\{u(k)\in\Omega(k)\}_{k=1}^{N-1}}\left\{\sum_{k=1}^{N-1} F(x(k),u(k),k) + S(x(N))\right\}$ de la Ecuación (2)

$$J^*(x_0) = \max_{u(0)\in\Omega(0)}\{F(x(0),u(0),0) + \max_{u(1)\in\Omega(1)}\{F(x(1),u(1),1) + ...$$
$$+ \max_{u(N-1)\in\Omega(N-1)}\{F(x(N-1),u(N-1),N-1) + S(x(N))\}\}...\}.$$

Por otro lado, recordemos que la maximización está sujeta a

$$x(k+1) = f(x(k),u(k),k),\ \ x(0) = x_0.$$

Si aplicamos el algoritmo,

$$\begin{aligned}
J_N^*\{x(N)\} &= S(x(N)) \\
J_{N-1}^*\{x(N-1)\} &= \max_{u(N-1)\in\Omega(N-1)}\{F(x(N-1),u(N-1),N-1) + S(x(N))\} \\
&= \max_{u(N-1)\in\Omega(N-1)}\{F(x(N-1),u(N-1),N-1) + S(f(x(N-1),u(N-1),N-1))\} \\
J_{N-2}^*\{x(N-2)\} &= \max_{u(N-2)\in\Omega(N-2)}\{F(x(N-2),u(N-2),N-2) + J_{N-1}^*\{x(N-1)\}\} \\
&= \max_{u(N-2)\in\Omega(N-2)}\{F(x(N-2),u(N-2),N-2) \\
&+ \underbrace{\max_{u(N-1)\in\Omega(N-1)}\{F(x(N-1),u(N-1),N-1) + S(f(x(N-1),u(N-1),N-1))\}\}}_{=J_{N-1}^*\{x(N-1)\}} \\
&\vdots \\
J_0^*\{x(0)\} &= \max_{u(0)\in\Omega(0)}\{F(x(0),u(0),0) + J_1^*\{\underbrace{x(1)}_{=f(x(0),u(0),0)}\}\} \\
&= \max_{u(0)\in\Omega(0)}\{F(x(0),u(0),0) + \max_{u(1)\in\Omega(1)}\{F(x(1),u(1),1) + ... \\
&+ \max_{u(N-1)\in\Omega(N-1)}\{F(x(N-1),u(N-1),N-1) + S(x(N))\}\}\} \\
&= J^*(x_0).
\end{aligned}$$

□

Observación. *Se cumple que* J_k^* *es función de* $x(k)$ *dado que, por definición,*

$$\begin{aligned}
J_k^* &= \max_{u(k)\in\Omega(k)}\{F(x(k),u(k),k) + J_{k+1}^*\{x(k+1)\}\} \\
&= \max_{u(k)\in\Omega(k)}\{F(x(k),u(k),k) + J_{k+1}^*\{f(x(k),u(k),k)\}\}.
\end{aligned}$$

Observación. *Si el problema fuese de minimización, simplemente los términos* máx *pasan a ser* mín*.*

Teorema 7. ***Teorema de optimalidad de Bellman.*** *Supongamos que* $u^* = (u^*(0), ..., u^*(N-1))^T$ *es el control óptimo del problema, y* $x^* = (x^*(0), ..., x^*(N))^T$ *la correspondiente trayectoria de estado óptima. Consideremos el sub-problema*

$$\mathcal{P}_D^j : \begin{cases} \max_{\{u(k)\}_{k=j}^{N-1}} & \sum_{k=j}^{N-1} F(x(k), u(k), k) + S(x(N)) \\ s.a.: & x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \\ & x(j) = x^*(j) \\ & u(k) \in \Omega(k), \;\; k = j, ..., N-1. \end{cases}$$

Entonces, el control óptimo del problema $\mathcal{P}_D^j$ *es* $u^* = (u^*(j), ..., u^*(N-1))^T$.

Observación. *Esto se debe a que el algoritmo se aplica de* $k = N$ *a* $k = 0$.

4. Método vía sistema de ecuaciones en diferencias

Corolario 8. *A partir de la ecuación*

$$J_k^*\{x(k)\} = \max_{u(k)\in\Omega(k)} \left\{F(x(k), u(k), k) + J_{k+1}^*(f(x(k), u(k), k))\right\}$$

en caso f *sea diferenciable respecto a sus argumentos, para todo* $k = 0, ..., N-1$, *en caso la solución sea interior*

$$\frac{\partial F}{\partial u(k)} + J_{k+1}^{'} \frac{\partial f}{\partial u(k)} = 0$$
$$\frac{\partial F(x, u^*, k))}{\partial x(k)} + J_{k+1}^{'} \frac{\partial f(x, u^*, k)}{\partial x(k)} = J_k^{'}$$

Observación. *La notación* $J_k^{'}$ *equivale a* $\frac{dJ_k}{dx(k)}$.

Ejemplo 9. Consideremos el siguiente problema $\mathcal{P}_D$

$$\max \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\sqrt{c(k)}}_{=F(x(k),c(k),k)}$$
$$s.a. \; x(k+1) = \underbrace{(1+r)x(k) - c(k)}_{=f(x(k),c(k),k)}$$
$$x(0) = x_0 > 0.$$

Luego, a partir del Corolario (8)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\sqrt{c(k)}} + J'_{k+1}(-1) &= 0\\ J'_{k+1}(1+r) &= J'_k.\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\sqrt{c(k)}} &= \frac{J'_k}{1+r}\\ J'_{k+1}(1+r) &= J'_k.\end{aligned}$$

Como esto es válido para todo $k = 0, ..., N-1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\sqrt{c(k+1)}} &= \frac{J'_{k+1}}{1+r}\\ J'_{k+1}(1+r) &= J'_k.\end{aligned}$$

Por ende,

$$\begin{aligned}\frac{(1+r)}{2\sqrt{c(k+1)}} &= J'_{k+1}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{c(k)}}.\end{aligned}$$

Por ende,

$$c(k+1) = (1+r)^2 c(k).$$

Usando la ecuación de estado, se obtiene el sistema de ecuaciones en diferencias

$$\begin{aligned}x(k+1) &= (1+r)x(k) - c(k)\\ c(k+1) &= (1+r)^2 c(k).\end{aligned}$$

En formato matricial

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ c(k+1) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1+r & -1 \\ 0 & (1+r)^2 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x(k) \\ c(k) \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de A son $(1+r)$ y $(1+r)^2$. Por otro lado, los vectores propios son

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ (1+r)(-r) \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\begin{pmatrix} x(k) \\ c(k) \end{pmatrix} = c_1(1+r)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2(1+r)^{2k} \begin{pmatrix} 1 \\ (1+r)(-r) \end{pmatrix}.$$

Finalmente, para encontrar las constantes, usamos lo siguiente. Primero, $x(0) = x_0$. Así,

$$c_1 + c_2 = x_0.$$

Luego, dado que $S(x(N)) = 0$, en la etapa $k = N-1$, por el algoritmo de programación dinámica:

$$J^*_{N-1}\{x(N-1)\} = \max_{u(N-1)\in[0,x(N-1)]} \{\sqrt{u(N-1)}\}.$$

Dado que $\sqrt{\cdot}$ es estrictamente creciente, $u(N-1) = x(N-1)$. Por ende,

$$c_1(1+r)^{N-1} + c_2(1+r)^{2N-2} = c_2(1+r)^{2N-2}(1+r)(-r).$$

Como $c_1 = x_0 - c_2$:

$$(x_0 - c_2)(1+r)^{N-1} + c_2(1+r)^{2N-2} = c_2(1+r)^{2N-2}(1+r)(-r).$$

La solución candidata al consumo es $c(k) = c_0(1+r)^{2k}$, donde

$$c_0 = \frac{x_0(1+r)(-r)}{[1 + (1+r)(-r)(1+r)^{N-1} - (1+r)^{N-1}]} > 0.$$

Observación. *Eventualmente, la solución puede ser de esquina en todo paso, dando lugar a la solución $c(k) = x(k)$ y $x(k) = r^k x_0$.*

Observación. *Es posible corroborar que la solución a $\max_{c(k)\in\Omega(k)}\{F(x(k), c(k), k) + J^*_{k+1}(x(k+1))\}$ tiene solución interior. Esto pues,*

$$\max_t\{\phi(t) = \sqrt{t} + \sqrt{a-t}\},\ a \geq t > 0$$

tiene solución en un punto crítico.

Observación. *La interpretación económica de la solución $c(k) = c_0(1+r)^{2k}$ es la siguiente. Dado que las preferencias intertemporales son constantes (no hay factor de descuento) y la riqueza naturalmente por el interés (sin $c = 0$), el consumo va creciendo hasta que, en el periodo final (dado que $S = 0$, i.e., no importa cuanto dinero queda), se consume todo lo disponible en la etapa $k = N-1$.*

5. Factor de descuento

Sea $\beta \in (0,1)$. Ahora, vamos a considerar el siguiente $\mathcal{P}_D^\beta$

$$\mathcal{P}_D^\beta : \begin{cases} \text{máx}_{\{u(k)\}_{k=0}^{N-1}} & J = \sum_{k=0}^{N-1} \beta^k F[x(k), u(k), k] + \beta^N S[x(N)] \\ s.a. & x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \\ & x(0) = x_0 \\ & u(k) \in \Omega(k). \end{cases}$$

De acuerdo con el algoritmo de Bellman:

$$J_N^*\{x(N)\} = \beta^N S[x(N)] \tag{3}$$

y, para $k \in [0, N-1]$,

$$J_k^*\{x(k)\} = \max_{u(k)\in\Omega(k)} \left\{\beta^k F[x(k), u(k), k] + J_{k+1}^*\{f(x(k), u(k), k\}\right\}. \tag{4}$$

Proposición 2. *Las ecuaciones (3) y (4), son equivalentes a formular el siguiente algoritmo*

$$V_N^*\{x(N)\} = S[x(N)]$$

$$V_k^*\{x(k)\} = \max_{u(k)\in\Omega(k)} \{F[x(k), u(k), k] + \beta V_{k+1}^*\{\underbrace{f(x(k), u(k), k)}_{=x(k+1)}\}\}.$$

Observación. *Esto implica por un lado que*

$$V_N^*\{x(N)\} = \frac{1}{\beta^N} J_N^*\{x(N)\} = S[x(N)].$$

Demostración. Definamos

$$V_k^*\{x(k)\} = \frac{1}{\beta^k} J_k^*\{x(k)\}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} V_k^*\{x(k)\} &= \frac{1}{\beta^k} \max_{u(k)\in\Omega(k)} \left\{\beta^k F(x(k), u(k), k) + J_{k+1}^*\{x(k+1)\}\right\} \\ &= \max_{u(k)\in\Omega(k)} \left\{F(x(k), u(k), k) + \frac{1}{\beta^k} J_{k+1}^*\{x(k+1)\}\right\} \\ &= \max_{u(k)\in\Omega(k)} \left\{F(x(k), u(k), k) + \frac{\beta}{\beta^{k+1}} J_{k+1}^*\{x(k+1)\}\right\} \\ &= \max_{u(k)\in\Omega(k)} \left\{F(x(k), u(k), k) + \beta V_{k+1}^*\{x(k+1)\}\right\}. \end{aligned}$$

□

¿Cuál es la diferencia entre $V_k^*\{x(k)\}$ y $J_k^*\{x(k)\}$?

1. $J_k^*\{x(k)\}$ da el valor óptimo descontado al *periodo 1*, del funcional truncado que contiene los periodos $k+1$ a N, cuyo estado inicial es $x(k)$.

2. $V_k^*\{x(k)\}$ da el valor corriente del periodo $[k, k+1]$ (como si fuese un problema de consumo intertemporal en dos etapas).

Lema 10. *Las ecuaciones en diferencias que se obtienen en caso se incorpore un factor de descuento y el $\mathcal{P}_D$ sea un $\mathcal{P}_D^\beta$*

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u(k)} + \beta V'_{k+1} \frac{\partial f}{\partial u(k)} & = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x(k)} + \beta V'_{k+1} \frac{\partial f}{\partial x(k)} & = V'_k \end{cases}$$

Se evalúa en el óptimo.

6. Horizonte de tiempo infinito

Nos situamos en una economía con tres bienes:

1. Un bien de producción final.
2. Capital.
3. Trabajo.

Asimismo, consideremos una familia con la siguiente estructura de preferencias intertemporales

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

y una dotación $k_0 > 0$. Ahora, por otro lado, se tiene una tecnología f que permite producir el bien y a través del capital y el trabajo

$$y = f(k, \ell).$$

El producto y puede ser invertido o consumido, en cada periodo:

$$y_t = c_t + i_t.$$

El capital, tiene su propia dinámica

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t. \tag{5}$$

La ecuación (5) nos dice que el capital en el periodo siguiente es igual a su valor futuro teniendo en cuenta el ratio de depreciación δ, más la inversión en reposición.

Notación. *El precio del bien y en el tiempo t es denotado p_t. El precio del trabajo en términos de la producción en el tiempo t se denota w_t y el del capital r_t.*

A continuación, algunos ejemplos de $\mathcal{P}_\infty$.

Ejemplo 11. El problema de la firma es

$$\mathcal{P}_\infty^F : \begin{cases} \pi & = \text{máx}_{\{y_t,k_t,\ell_t\}_{t=0}^{\infty}} \left\{\sum_{t=0}^{\infty}[p_t y_t - w_t \ell_t - r_t k_t]\right\} \\ s.a. : & y_t = f(k_t, \ell_t). \end{cases} \tag{6}$$

Ejemplo 12. El problema de las familias es

$$\mathcal{P}_{\infty}^{C}: \begin{cases} V & = \max_{\{c_t,k_{t+1},i_t\}_{t=0}^{\infty}} \{\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)\} \\ s.a.: & k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t \\ & \sum_{t=0}^{\infty} p_t(c_t+i_t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} p_t[w_t\ell_t + r_t k_t] + \pi \\ & k_0 \text{ dado.} \end{cases} \tag{7}$$

Observación. *El problema de la firma en el caso estático se simplifica a*

$$\max_{\{k,\ell\}} f(k,\ell) - rk - w\ell.$$

Las condiciones de primer orden proveen (soluciones interiores), siempre y cuando f posea derivadas parciales continuas (satisfacen las condiciones de Inada):

$$\begin{aligned} f_k(k,\ell) - r &= 0 \\ f_\ell(k,\ell) - w &= 0. \end{aligned}$$

Suponemos que f es homogénea de grado uno.

Proposición 3. *Bajo los supuestos de f,*

$$f_k(k,\ell)k + f_\ell(k,\ell)\ell = f(k,\ell).$$

Demostración. Por la homogeneidad,

$$f(\lambda k, \lambda \ell) = \lambda f(k,\ell).$$

Luego, diferenciando respecto a λ

$$f_k(\lambda k, \lambda\ell)k + f_\ell(\lambda k,\lambda\ell)\ell = f(k,\ell).$$

Evaluando en $\lambda = 1$ se concluye lo solicitado. □

Proposición 4. *En el equilibrio, normalizando p_t, la firma realiza profits nulos.*

Demostración.

$$\begin{aligned} \pi &= \sum_{t=0}^{\infty} [f(k_t,\ell_t) - r_t k_t - w_t \ell_t] \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} [f_k(k_t,\ell_t)k_t + f_\ell(k_t,\ell_t)\ell_t - r_t k_t - w_t\ell_t] \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\square$

Proposición 5. *Las condiciones de primer orden (Lagrangiano $\mathcal{L}$) al problema de las familias proveen para todo t*

$$\begin{aligned}
\beta^t u'(c_t) &= \lambda p_t \\
\frac{\beta^t u'(c_t)}{\beta^{t+1} u'(c_{t+1})} &= \frac{p_t}{p_{t+1}} \\
u'(c_t) &= \beta \frac{p_t}{p_{t+1}} u'(c_{t+1}) \\
\frac{p_t}{p_{t+1}} &= r_{t+1} + 1 - \delta.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
u'(c_t) &= \beta[r_{t+1} + 1 - \delta]u'(c_{t+1}) \\
&= \beta[f_k(k_{t+1}) + 1 - \delta]u'(c_{t+1}) \\
&= \beta[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta]u'(c_{t+1}).
\end{aligned}$$

Corolario 13. ***El problema del planificador social.***

$$\begin{aligned}
\max_{\{c_t, i_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\
s.a. : k_{t+1} &= (1-\delta)k_t + i_t \\
c_t + i_t &\leq f(k_t) \\
k_0 &\text{ dado.}
\end{aligned}$$

Observación. *El problema del planificador social es un caso particular de*

$$\begin{cases}
\sup_{\{x_t\}} & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) \\
& x_{t+1} \in \Gamma(x_t) \\
& x_0 \textit{ dado.}
\end{cases}$$

En efecto, haciendo

$$c_t = f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}$$

el problema es

$$\begin{cases}
\sup_{\{k_t\}} & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c(t)) \\
& k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t \\
& k_0 > 0.
\end{cases}$$

Acá

$$\Gamma(x_t) = [0, f(k_t) + (1-\delta)k_t],\ x_t \to k_t.$$

Observación. *Se está indexando con $t \in \mathbb{Z}_+$. $\Gamma : X \to 2^X$, $X \subset \mathbb{R}^n$ es una correspondencia.*

Definición 14. El conjunto $\tilde{x} = \{x_t\}_{t=0}^{\infty}$ se conoce como plan y

$$\Pi(x_0) = \{\tilde{x} : x_{t+1} \in \Gamma(x_t),\ \forall\ t,\ x(0) = x_0\}$$

es el conjunto de planes asequibles. Finalmente,

$$u(\tilde{x}) = \lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$$

el valor del plan.

6.1. Supuestos y observaciones

1. Se escribe sup y no máx debido a que no se conoce si se alcanza el máximo o si existe.
2. La serie $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$ representa $\lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$.
3. x_t es la variable de estado y $x_t \in X$.
4. Γ es la correspondencia que mapea x_t en $\Gamma(x_t) \subset X$.

6.2. Enfoque variacional

Vamos a tomar $X \subset \mathbb{R}_+$ (o sea $n = 1$). Esto es coherente con el hecho que $k_t \geq 0$. Luego, F es creciente respecto a su primer argumento, y posee primeras derivadas parciales continuas. Finalmente, se supone F cóncava en sus argumentos.

Proposición 6. *Ecuación de Euler.* *Si $\tilde{x}^*$ es el plan óptimo y $x_{t+1}^* \in int(\Gamma(x_t^*))$ para todo t, entonces*

$$F_y(x_t^*, x_{t+1}^*) + \beta F_x(x_{t+1}^*, x_{t+2}^*) = 0.$$

F_x es la derivada parcial respecto a la primera componente y F_y respecto a la segunda.

Demostración. Esto es consecuencia del hecho que, si $\tilde{x}^*$ es una política óptima, entonces resuelve la ecuación funcional (ver enfoque recursivo)

$$V(x) = \max_{y\in\Gamma(x)} \{F(x, y) + \beta V(y)\}$$

en el sentido que $x = x_t^*$ y $y = x_{t+1}^*$. Si V es diferenciable (bajo los supuestos preestablecidos lo es: ver última sección), por condiciones de primer orden (notando que $y = g(x)$)

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) + \beta V'(g(x)) = 0.$$

Por otro lado, aplicando el Teorema de la Envolvente

$$V'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}[x, g(x)].$$

Haciendo $x = x_t^*$ y $g(x^*) = x_{t+1}^*$ en la primera ecuación:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial y}(x_t^*, x_{t+1}^*) + \beta V'(x_{t+1}^*)$$

Haciendo $x = x_{t+1}^*$ y $g(x) = x_{t+2}^*$ en la segunda:

$$V'(x_{t+1}^*) = \frac{\partial F}{\partial x}[x_{t+1}^*, x_{t+2}^*].$$

Así,

$$0 = \frac{\partial F}{\partial y}(x_t^*, x_{t+1}^*) + \beta \frac{\partial F}{\partial x}[x_{t+1}^*, x_{t+2}^*].$$

Notemos que es posible hacer $x = x_t^*$, $g(x) = x_{t+1}^*$ y luego $x = x_{t+1}^*$, $g(x) = x_{t+2}^*$ pues la ecuación funcional se cumple para cualquier t. $\square$

Proposición 7. *Si se cumplen todos los supuestos señalados y $\tilde{x}^*$ es una solución interior de forma que satisface la ecuación de Euler,*

$$\lim_{T\to\infty} \beta^T F_x(x_T^*, x_{T+1}^*) x_T^* = 0$$

y

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t^*, x_{t+1}^*) < \infty,$$

entonces, $\tilde{x}$ es solución al problema

$$\begin{cases} \sup_{\{x_t\}} & \sum_{t=0}^{\infty} F(x_t, x_{t+1}) \\ & x_{t+1} \in \Gamma(x_{t+1}) \\ & x_0 > 0. \end{cases}$$

Más aún, si F es estrictamente cóncava, la solución es única.

Demostración. Sea $\tilde{x}$ un plan otro que $\tilde{x}^*$ tal que $x_{t+1} \neq x^*_{t+1}$ para algún t. Sea

$$\Delta = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [F(x^*_t, x^*_{t+1}) - F(x_t, x_{t+1})].$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\Delta &= \lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \beta^t [F(x^*_t, x^*_{t+1}) - F(x_t, x_{t+1})] \\
&\geq \lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \beta^t [F_x(x^*_t, x^*_{t+1})[x^*_t - x_t] + F_y(x^*_t, x^*_{t+1})[x^*_{t+1} - x_{t+1}]] \\
&= F_x(x^*_0, x^*_1)[x^*_0 - x_0] + \lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \beta^{t+1} F_x(x^*_{t+1}, x^*_{t+2})[x^*_{t+1} - x_{t+1}] + \sum_{t=0}^{T} \beta^t F_y(x^*_t, x^*_{t+1})[x^*_{t+1} - x_{t+1}] \\
&- \lim_{T\to\infty} \beta^{T+1} F_x(x^*_{T+1}, x^*_{T+2})[x^*_{T+1} - x_{T+1}] \\
&= F_x(x^*_0, x^*_1)[x^*_0 - x_0] + \lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \beta^t (\beta F_x(x^*_{t+1}, x^*_{t+2}) + F_y(x^*_t, x^*_{t+1}))[x^*_{t+1} - x_{t+1}] \\
&- \lim_{T\to\infty} \beta^{T+1} F_x(x^*_{T+1}, x^*_{T+2})[x^*_{T+1} - x_{T+1}] \\
&= - \lim_{T\to\infty} \beta^{T+1} F_x(x^*_{T+1}, x^*_{T+2})[x^*_{T+1} - x_{T+1}] \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

La primera desigualdad es consecuencia de la diferenciabilidad y concavidad (si fuese estricta, sería desigualdad estricta, lo que asegura la unicidad de $\tilde{x}^*$). La última igualdad es consecuencia de la condición de transversalidad junto al hecho que $F_x, x_t, \beta \geq 0$. □

Ejemplo 15. Para el problema

$$F(x_t, x_{t+1}) = u(f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1})$$

la Ecuación de Euler es

$$-u'(f(k_t)+(1-\delta)k_t-k_{t+1})+\beta u'(f(k_{t+1})+(1-\delta)k_{t+1}-k_{t+2})[f'(k_{t+1})+(1-\delta)] = 0,$$

la cual es una ecuación en diferencias de segundo orden. Usando la variable consumo:

$$-u'(c_t) + \beta[f'(k_{t+1}) + (1-\delta)]u'(c_{t+1}) = 0.$$

6.3. Enfoque recursivo

Definamos

$$\begin{aligned} V^*(x_0) = \sup_{\{x_t\}} & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) \\ & x_{t+1} \in \Gamma(x_t) \\ & x_0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

Nuestro objetivo, recordemos, es obtener un plan x^* tal que se alcance el valor V^* para cualquier x_0.

Teorema 16. *Supongamos que $V^*(x)$ está bien definida para todo $x \in X$, entonces V^* satisface la ecuación de Bellman*

$$V^*(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} \{F(x, y) + \beta V^*(y)\}.$$

Demostración. Tomemos cualquier $x_0 \in X$. Sea $\{x_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ un plan óptimo que parte desde x_0. Por definición,

$$V^*(x_0) = F(x_0, x_1^*) + \beta \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} F(x_t^*, x_{t+1}^*) \geq F(x_0, x_1) + \beta \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} F(x_t, x_{t+1}),$$

para cualquier otro plan asequible $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$. Tomando cualquier $x_1 \in \Gamma(x_0)$, sea $\{x_t\}_{t=1}^{\infty}$ un plan óptimo partiendo de x_1. Entonces,

$$V^*(x_1) = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} F(x_t, x_{t+1}).$$

Así,

$$F(x_0, x_1^*) + \beta \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} F(x_t^*, x_{t+1}^*) \geq F(x_0, x_1) + \beta V^*(x_1),$$

para cualquier $x_1 \in \Gamma(x_0)$. Usando esto en $x_1 = x_1^*$

$$\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} F(x_t^*, x_{t+1}^*) \geq V^*(x_1).$$

Así,

$$F(x_0, x_1^*) + \beta V^*(x_1^*) \geq F(x_0, x_1) + \beta V^*(x_1), \ \forall \ x_1 \in \Gamma(x_0).$$

□

Teorema 17. *Supongamos que $V^*(x)$ está bien definida para todo $x \in X$.*

Supongamos que el plan $\{x_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ *es óptimo partiendo de* x_0. *Entonces,*

$$V^*(x_t^*) = F(x_t^*, x_{t+1}^*) + \beta V^*(x_{t+1}^*), \ t = 0, 1, 2, ...$$

Demostración. Ya sabemos que

$$V^*(x_0) = F(x_0, x_1^*) + \beta V^*(x_1^*).$$

Más aún $\{x_t^*\}_{t=1}^{\infty}$ es un plan óptimo partiendo de x_1^*. Así, de manera análoga,

$$V^*(x_1^*) = F(x_1^*, x_2^*) + \beta V(x_2^*).$$

Así, por inducción, se establece el resultado deseado. □

Proposición 8. *Sea* $\Gamma(x)$ *no vacío,* $F(x, y) < M$ *sobre para todo par* (x, y), $\exists \ y \in \Gamma(x)$ *tal que* $V(x) = F(x, y) + \beta V(y)$ *y*

$$\lim_{T\to\infty} \beta^T V(x_T) = 0, \ \forall \ \tilde{x} \in \Pi(x_0), \ \forall \ x_0 \in X.$$

Entonces, $V = V^*$.

Demostración. Notemos que, como $F(x, y) < M$:

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) < \lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \beta^t M = \frac{M}{1-\beta}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
V(x_0) = &\sup_{x_1\in\Gamma(x_0)} F(x_0, x_1) + \beta V(x_1) \\
&\geq F(x_0, x_1) + \beta V(x_1) \\
&F(x_0, x_1) + \beta F(x_1, x_2) + \beta^2 V(x_2)... \\
&\vdots \\
&\geq \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) + \beta V(x_T), \forall \ \{x_t\}_{t=0}^{\infty}.
\end{aligned}$$

Tomando límite,

$$V(x_0) \geq u(\tilde{x}), \ \forall \tilde{x} \in \Pi(x_0).$$

Ahora, por otro lado, tomemos una sucesión $\tilde{x} \in \Pi(x_0)$

$$V(x_t) = F(x_t, x_{t+1}) + \beta V(x_{t+1}).$$

$$V(x_0) = \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) + \beta^T V(x_T).$$

Tomando límite,

$$V(x_0) = u(\tilde{x}).$$

$\square$

Observación. *Recordemos que* $V^* = \sup_{\{x_t\}_{t=0}^\infty} \sum_{t=0}^\infty F(x_t, x_{t+1})$, $x_{t+1} \in \Gamma(x_t)$ *mientras que* V *es solución de la ecuación funcional* $V(x) = \sup_y \{F(x,y) + \beta V(y)\}$.

6.4. Preliminares

Nos interesamos en

$$V(x) = \sup_y \{F(x,y) + \beta V(y)\}, \; s.a.: \; y \in \Gamma(x). \tag{8}$$

Definamos el operador

$$T(f)(x) = \sup_y \{F(x,y) + \beta f(y)\}, \; s.a.: \; y \in \Gamma(x).$$

Entonces, V puede ser definida como el punto fijo de T. Entonces, nos preguntamos naturalmente, ¿tiene T un punto fijo? ¿Cómo obtenerlo? Vamos a suponer nuevamente que $F(x,y)$ es acotada sobre $X \times \Gamma(x)$, donde $\Gamma : X \to X$ (correspondencia), $X \subset \mathbb{R}^n$. Además, X se supone convexo y Γ hemicontinua superiormente e inferiormente[1] a valores compactos[2] y no vacía.

Observación. *Notemos que la definición de hemicontinuidad requiere una topología.*

Observación. *El operador* T *está definida sobre el espacio métrico* (S, ρ)

$$S = \{f : X \to \mathbb{R} : \; \textit{continua y acotada}\}$$

$$||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

y

$$\rho(f,g) = ||f - g|| = \sup_{x \in X} ||f(x) - g(x)||.$$

[1]Una correspondencia $\Gamma : A \to B$ es hemicontinua superiormente si, para todo $a \in A$ de forma que $V \subset B$, $\Gamma(a) \subset V$, existe una vecindad U de a, tal que, $\forall x \in U$, $\Gamma(x)$ pertenece a un subconjunto de V. Por otro lado, es hemicontinua inferiormente si para cualquier vecindad V y $a \in X$, tal que $V \cap \Gamma(a) \neq \emptyset$, existe una vecindad U de a tal que $\Gamma(x) \cap V \neq \emptyset$ para todo $x \in U$.

[2]$\Gamma(x)$ compacto.

Proposición 9. *El espacio métrico (S, ρ) es completo. Más aún, es un espacio vectorial normado completo.*

Demostración. El hecho que $S = \mathcal{B}(X)$ es un espacio vectorial es por definición. Asimismo, lo es que $||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ sea una norma. Queda entonces mostrar que es completo. Sea $\{f_n\}$ de Cauchy. Entonces, buscamos probar que existe $f \in S$ de forma que, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe N_ε de forma que $||f_n - f|| \leq \varepsilon$ para todo $n \geq N_\varepsilon$. Primero, la sucesión de números reales $\{f_n(x)\}$ cumple lo siguiente

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| = ||f_n - f_m||.$$

Entonces, como $\mathbb{R}$ es completo, existe $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f_n \to f$. Ahora, veamos que $||f_n - f|| \to 0$. Dado $\varepsilon > 0$, escogemos N_ε tal que $||f_n - f_m|| \leq \varepsilon/2$. Luego,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &\leq ||f_n - f_m|| + |f_m(x) - f(x)| \\ &\leq \varepsilon/2 + |f_m(x) - f(x)|. \end{aligned}$$

Como $\{f_m(x)\}$ converge a $f(x)$, se escoge separadamente m de forma que $|f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2$. Así, $||f_n - f|| \leq \varepsilon$, $n \geq N_\varepsilon$. Finalmente, queda probar que f es acotada y continua. El hecho que sea acotada es consecuencia de que $|f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)|$, para todo n y $x \in X$. Luego, dado $\varepsilon > 0$, buscamos $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \text{ si } ||x - y||_2 < \delta.$$

Escojamos k de forma que $||f - f_k|| < \varepsilon/3$. Dado que $f_n \to f$ con la norma del supremo, esto es posible. Así, escogemos $\delta > 0$ de forma que

$$||x - y||_2 < \delta \implies |f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon/3.$$

Recordemos que f_k es continua. Por ende,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| \\ &\leq 2||f - f_k|| + |f_k(x) - f_k(y)| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Lema 18. *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ y $Y \subset \mathbb{R}^m$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ es continua. Si Γ es tal como mencionado previamente, $h(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} f(x, y)$ es continua y la* *correspondencia $G : X \to Y$ definida por*

$$G(x) = \{y \in \Gamma(x) : f(x, y) = h(x)\}$$

es no vacía, a valores compacto y hemicontinua superiormente.

Proposición 10. *$T : S \to S$. Es decir, $T(f) \in S$.*

Demostración. Aplicando el Lema (18),

$$f(x, y) = F(x, y) + \beta f(y).$$

y $h(x) = T(f)(x)$. Esto es posible dado que F y f son acotadas. $\square$

Entonces, dadas las premisas, el objetivo es demostrar que T posee un único punto fijo.

Proposición 11. ***Condiciones de Blackwell.*** *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{B}(X)$ el espacio de las funciones acotadas continuas $f : X \to \mathbb{R}$ con la norma del supremo. T es una contracción con módulo β si*

1. *Si $f, g \in \mathcal{B}(X)$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$, entonces $T(f)(x) \leq T(g)(x)$ para todo $x \in X$.*
2. *Existe $\beta \in (0, 1)$ tal que $T(f + a)(x) \leq T(f)(x) + \beta a$ para todo $f \in \mathcal{B}(X)$, $a \geq 0$, $x \in X$.*

Demostración. Si $f(x) \leq g(x)$, $\forall\ x \in X$, denotamos $f \leq g$. Luego,

$$f \leq g + ||f - g||.$$

Luego, debido a las premisas,

$$T(f) \leq T(g + ||f - g||) \leq T(g) + \beta||f - g||.$$

En caso $g \leq f$, $T(g) \leq T(f) + \beta||f - g||$. Así,

$$||T(f) - T(g)|| \leq \beta||f - g||.$$

$\square$

Las condiciones de Blackwell se satisfacen en el caso de

$$T(f)(x) = \sup_{y \in \Gamma(x)} \{F(x, y) + \beta f(y)\}.$$

En efecto, si $f \leq g$

$$\begin{gathered} F(x,y) + \beta f(y) \leq F(x,y) + \beta g(y) \\ \sup_{y \in \Gamma(x)} \{F(x,y) + \beta f(y)\} \sup_{y \in \Gamma(x)} \{\leq F(x,y) + \beta g(y)\} \\ T(f)(x) \leq T(g)(x). \end{gathered}$$

y

$$\begin{aligned} T(f+a)(x) &= \sup_{y \in \Gamma(x)} \{F(x,y) + \beta[f(y) + a]\} \\ &= T(f)(x) + \beta a. \end{aligned}$$

Proposición 12. *Si (S, ρ) es un espacio métrico completo y $T : S \to S$ es una contracción con módulo β, entonces*

1. *T posee un único punto fijo V en S.*
2. *Para cualquier $V_0 \in S$, $\rho(T^n V_0, V) \leq \beta^n \rho(V_0, V)$, $n = 0, 1, 2...$*

Demostración. (a) Sea $V_n = T^n V_0$. Como T es una contracción de módulo $\beta > 0$

$$\begin{aligned} \rho(V_2, V_1) &= \rho(TV_1, TV_0) \leq \beta \rho(V_1, V_0) \\ \rho(V_3, V_2) &= \rho(TV_2, TV_1) \beta \rho(V_2, V_1) \leq \beta^2 \rho(V_1, V_0) \\ &\vdots \\ \rho(V_{n+1}, V_n) &\leq \beta^n \rho(V_1, V_0). \end{aligned}$$

Así, para cualquier $m > n$, usando la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned} \rho(V_m, V_n) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \rho(V_{k+1}, V_k) \\ &\leq \left[\sum_{k=n}^{m-1} \beta^k \right] \rho(V_1, V_0) \\ &\leq \frac{\beta^n}{1-\beta} \rho(V_1, V_0). \end{aligned}$$

Así, $\{V_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Como S es completo, $V_n \to V \in S$. Queda probar que V es un punto fijo. Para cualquier $n \geq 0$

$$\begin{aligned} \rho(TV, V) &\leq \rho(TV, T^n V_0) + \rho(T^n V_0, V) \\ &\leq \beta \rho(V, T^{n-1} V_0) + \rho(T^n V_0, V). \end{aligned}$$

Sin embargo, $V_n, V_{n-1} \to V$. Así,

$$\lim_{n\to\infty} \rho(V, T^{n-1}V_0) + \rho(T^n V_0, V) = 0.$$

Por lo que, $\rho(TV, V) < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Por el $\varepsilon-$principio, $\rho(TV, V) = 0$. Finalmente, el punto fijo es único dado que

$$\rho(V, V') = \rho(TV, TV') \leq \beta\rho(V, V') \implies \rho(V, V') = 0.$$

(b) Como $T^n = T[T^{n-1}]$

$$\begin{aligned}
\rho(T^n V_0, V) &= \rho(T[T^{n-1}]V_0, TV) \\
&\leq \beta\rho(T^{n-1}V_0, V) \\
&\vdots \\
&\leq \beta^n \rho(V_0, V).
\end{aligned}$$

□

Corolario 19. *Existe una única función V que resuelve* (8).

Corolario 20. *Debido al Lema* (18),

$$G(x) = \{y \in \Gamma(x) : V(x) = F(x, y) + \beta f(y)\}$$

es a valores compacto y hemicontinua superiormente.

Demostración. $T(V)(x) = V(x)$. □

7. Propiedades de la función V

Vamos a asumir lo siguiente:

1. $F(x, y)$ es estrictamente creciente respecto a x.
2. $x \leq x' \implies \Gamma(x) \subset \Gamma(x')$ La notación $x \leq x'$ implica que $x_\ell \leq x'_\ell$ para todo ℓ.
3. Se mantienen los supuestos F acotada y $X \subset \mathbb{R}^n$ convexo, $\Gamma : X \to X$ correspondencia no vacía, a valores compactos y continua.

Proposición 13. *Sea $x' > x$ y $f \in S$.*

$$T(f)(x) = \max_{y\in\Gamma(x)} \{F(x, y) + \beta f(y)\}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \max_{y\in\Gamma(x')}\{F(x,y)+\beta f(y)\}\\
&\leq \max_{y\in\Gamma(x')}\{F(x',y)+\beta f(y)\}\\
&= T(f)(x').
\end{aligned}
$$

Proposición 14. *Si $F(x,y)$ es estrictamente cóncava V es estrictamente cóncava.*

Demostración. Queremos probar que T mapea funciones cóncavas en funciones cóncavas.

1. Sea $x_0 \neq x_1$ y $x_\theta = \theta x_0 + (1-\theta)x_1$, $\theta \in (0,1)$.

2. Sea $y_0 \in \Gamma(x_0)$ tal que $T(f)(x_0) = F(x_0,y_0) + \beta f(y_0)$ y similarmente, $y_1 \in \Gamma(x_1)$ tal que $T(f)(x_1) = F(x_1,y_1) + \beta f(y_1)$.

3. Entonces

$$
\begin{aligned}
T(f)(x_\theta) &\geq F(x_\theta, y_\theta) + \beta f(y_\theta)\\
&\quad \text{como } \Gamma \text{ es convexo } x_\theta, y_\theta \text{ son asequibles.}\\
&> \theta F(x_0, y_0 + (1-\theta)F(x_1,y_1) + \beta[\theta f(y_0) + (1-\theta)f(y_1)]\\
&\quad f, F \text{ cóncavas}\\
&= \theta T(f)(x_0) + (1-\theta)T(f)(x_1).
\end{aligned}
$$

□

¿Es V diferenciable? (Benveniste y Scheinkman 1979).