PUCP

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES

MATEMÁTICAS PARA ECONOMISTAS

PRÁCTICA CALIFICADA 5

PROFESOR: Jorge R. Chávez

JEFES DE PRÁCTICA: Joaquin Rivadeneyra, Marcelo Gallardo

SEMESTRE: 2022-2

FECHA DE ENTREGA: 24/11/2022

1. En el modelo de Solow estudiado en clase, asuma una función de producción Cobb Douglas con $\beta = 1 - \alpha$. Derive detalladamente la ecuación fundamental del modelo y muestre **matemáticamente** que una alteración en los parámetros del modelo no cambia la naturaleza de la estabilidad del equilibrio. En particular, pruebe que este sigue siendo atractor. **(4 puntos)**

A partir de los supuestos del modelo de Solow, como hemos visto, se deriva la siguiente ecuación fundamental:

$$k' = sf(k) - (n + \delta)k$$

donde $0 < \alpha < 1, n > 0, \delta > 0$.

Asumiendo una función de producción Cobb-Douglas tenemos:

$$k' = sk^{\alpha} - (n + \delta)k$$

Hallamos el equilibrio no nulo:

$$k' = sk^{\alpha} - (n + \delta)k = 0$$
$$k^* = \left(\frac{n + \delta}{s}\right)^{\frac{1}{\alpha - 1}}$$

Para analizar su estabilidad matemáticamente, empleamos el teorema que indica que debe cumplirse $k''(k^*) < 0$ para que el equilibrio sea estable atractor.

$$k'' = \alpha s k^{\alpha-1} - (n+\delta)$$

$$k''(k^*) = \alpha s \left(\frac{n+\delta}{s}\right) - (n+\delta)$$

$$k''(k^*) = (\alpha - 1)(n+\delta) < 0 \qquad \forall\, 0 < \alpha < 1, n > 0, \delta > 0$$

Queda demostrado.

2. El modelo de Ramsey se plantea de la siguiente manera. La función de producción $y = f(k)$ depende solo del stock de capital k. f es creciente con rendimientos marginales decrecientes y el producto se compone de consumo c, inversión neta y reposición de capital que se deprecia a una tasa constante δ. Para planear la inversión de forma óptima las autoridades eligen una función de utilidad u estrictamente creciente y estrictamente cóncava. El problema de las autoridades es elegir la trayectoria óptima del capital que maximice la utilidad total descontada a la tasa ρ. Para esto, consideran un capital inicial k_0 y un capital final $k(T) = k_T$. **(8 puntos)**

2.1) Plantee el problema y obtenga la Ecuación de Euler.

$c(t) = f(k) - k' - \delta k$, por lo que $u(c) = u(f(k) - k' - \delta k)$.

El problema es

$$\begin{aligned} \text{máx} \qquad & \int_0^T e^{-\rho t} u(f(k) - k' - \delta k) \\ \text{s.a.} \qquad & k(0) = k_0 \\ & k(T) = k_T \end{aligned}$$

y la condición de Euler es $F_k = \dfrac{d}{dt} F_{k'}$, en donde $F = u(f(k) - k' - \delta k) e^{-\rho t}$

Derivando, tenemos:

$$F_k = u'(c)(f'(k) - \delta) e^{-\rho t}$$

$$F_{k'} = u'(c)(-1) e^{-\rho t}$$

$$\frac{d}{dt} F_{k'} = -u''(c) c' e^{-\rho t} + e^{-\rho t} \rho u'(c)$$

Por lo que la ecuación de Euler se expresa como:

$$u'(c)(f'(k)-\delta)e^{-\rho t} = -u''(c)c'e^{-\rho t} + e^{-\rho t}\rho u'(c)$$

$$u'(c)(f'(k)-\delta-\rho) + u''(c)c' = 0$$

2.2) Considerando la función de utilidad

$$u(c) = \frac{1}{1-\theta}c^{1-\theta}, 0 < \theta < 1$$

obtenga el sistema

$$k' = f(k) - \delta k - c$$

$$c' = \frac{c}{\theta}(f'(k) - \delta - \rho)$$

Derivando:

$$u'(c) = c^{-\theta}$$

$$u''(c) = -\theta c^{-\theta-1}$$

Reemplazando en la ecuación de Euler:

$$c^{-\theta}(f'(k)-\delta-\rho) + (-\theta c^{-\theta-1})c' = 0$$

$$c' = \frac{c}{\theta}(f'(k) - \delta - \rho) \tag{1}$$

Además, despejando k' de $c(t)$:

$$c(t) = f(k - k' - \delta k)$$

$$k' = f(k) - \delta k - c \tag{2}$$

Estos dos resultados conforman un sistema dinámico no lineal

2.3) Pruebe que el sistema tiene tres puntos de equilibrio (k^*, c^*), donde uno de ellos es no nulo. Utilizando el teorema de Hartman Grobman, determine la estabilidad del equilibrio no nulo.

Resolviendo $k' = 0$ y $c' = 0$, tenemos los equilibrios:

- Por las características de la función de producción, sabemos que existe $\tilde{k}$ tal que $f(\tilde{k}) = \delta\tilde{k}$. Entonces, se cumple $k' = 0 \wedge c' = 0$ en el equilibrio $(0, \tilde{k})$.

- Como $f(0) = 0$, se cumple $k' = 0 \wedge c' = 0$ en el equilibrio $(0, 0)$.
- Como existen k^* y c^* tal que $f'(k^*) = \delta + \rho$ y además $c^* = f(k^*) - \delta k^*$, entonces se cumple $k' = 0 \wedge c' = 0$ en el equilibrio (c^*, k^*), en donde $c^* > 0, k^* > 0$

Computamos la matriz Jacobiana del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$J_{k,c} = \begin{pmatrix} f'(k) - \delta & -1 \\ \frac{c}{\theta} f''(k) & \frac{1}{\theta}(f'(k) - \delta - \rho) \end{pmatrix}$$

Evaluándola en el equilibrio no nulo, la Jacobiana se reduce a:

$$J_{k^*,c^*} = \begin{pmatrix} \rho & -1 \\ \frac{c^*}{\theta} f''(k^*) & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es

$$\frac{c^*}{\theta} f''(k^*) < 0$$

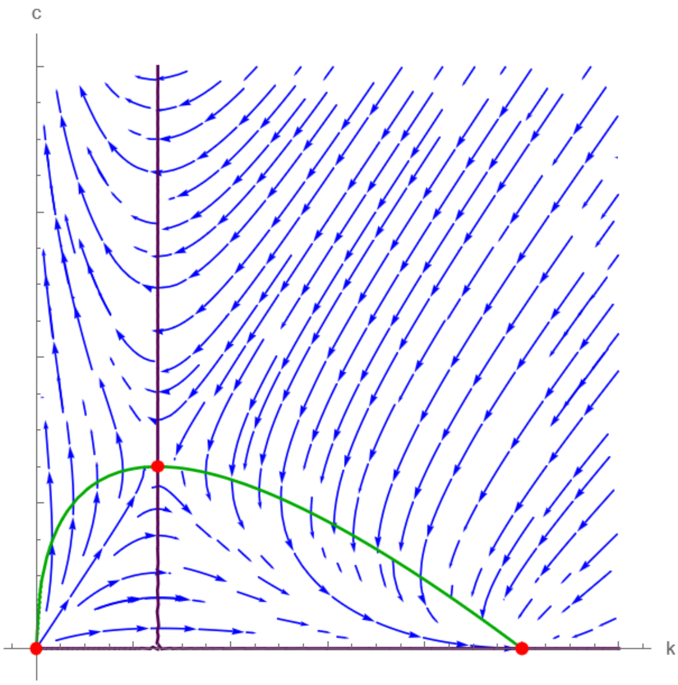
Como el producto de los valores característicos de la matriz es igual al determinante, los valores característicos son reales y de signo opuesto, por lo que, según el teorema de Hartman Grobman, el equilibrio es inestable tipo silla.

2.4) Halle y grafique las isoclinas del sistema. Elabore el diagrama de fases.

Hallamos las isoclinas del sistema

$$\begin{cases} k' = 0 \rightarrow c = f(k) - \delta k & \text{(graficada en color verde)} \\ c' = 0 \rightarrow f'(k) = \delta + \rho \ \vee \ c = 0 & \text{(graficadas en color morado)} \end{cases}$$

El diagrama de fases es el siguiente:



3. Una empresa desea establecer su plan de inversión con el fin de maximizar sus beneficios. Si la tasa de depreciación del capital es de $1/2$ y denotamos por $K = K(t)$ al stock de capital y por $I = I(t)$ a la inversión bruta, entonces la inversión neta puede expresarse como

$$K' = I - \frac{1}{2}K$$

La empresa desea maximizar el total de sus beneficios

$$\Pi = \int_0^{10} K - K^2 - \frac{1}{2}I^2 dt$$

en el horizonte de tiempo $[0, 4]$ y con un capital inicial $k(0) = 1/2$. Resuelva el problema **detalladamente** en cada caso: **(4 puntos)**

3.1) Dejando el capital libre al final del período.

3.2) El capital al final de período es $6/9$.

El problema es

$$\begin{aligned} \text{máx} \qquad & \int_0^4 \left(K - K^2 - \frac{1}{2} I^2 \right) dt \\ \text{s.a.} \qquad & K' = I - \frac{1}{2} K \\ & K(0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Se resuelve con el principio del máximo:

$$H = K - K^2 - \frac{1}{2} I^2 + \lambda \left(I - \frac{1}{2} K \right)$$

1. $\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial I} H \rightarrow \lambda' = -1 + 2K + \frac{1}{2}\lambda$
2. $I = \text{máx}_I\, H \rightarrow \begin{cases} \text{CPO: } I + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = I \\ \text{CSO: } -1 < 0 \end{cases}$
3. $K' = I - \frac{1}{2} K \rightarrow K' = \lambda - \frac{1}{2} K \qquad , K(0) = \frac{1}{2}$

Tenemos el siguiente sistema diferencial:

$$\begin{pmatrix} \lambda' \\ K' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo: $\begin{cases} \lambda(t) = I(t) & = C\left(2e^{\frac{3}{2}t} + e^{-\frac{3}{2}t}\right) - \frac{1}{18} e^{-\frac{3}{2}t} + \frac{2}{9} \\ K(t) & = C\left(e^{\frac{3}{2}t} + e^{-\frac{3}{2}t}\right) + \frac{1}{18} e^{-\frac{3}{2}t} + \frac{4}{9} \end{cases}$

En el caso a): $K(4)$ es libre, la condición de transversalidad es $\lambda(4) = 0$. Reemplazando en $\lambda(t)$:

$$C = \frac{\frac{1}{18} e^{-6} - \frac{2}{9}}{2e^{6} + e^{-6}}$$

En el caso b): $K(4) = \frac{6}{9}$. Reemplazando en $K(t)$:

$$C = \frac{\frac{2}{9} - \frac{1}{18} e^{-6}}{e^{6} - e^{-6}}$$

4. Se desea encontrar $c(t)$ que maximice

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} ln(c) dt$$

sujeto a $x' = rx - c$, $x(0) = b$. Suponga que tanto $x(t)$ como $c(t)$ son acotadas y que $\rho > r > 0$. **(4 puntos)**

Resolviendo con el principio del máximo:

$$H = \ln(c)e^{-\rho t} + \lambda(rx - c)$$

1. $\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial I}H \rightarrow \lambda' = -r\lambda \rightarrow \lambda(t) = Ae^{-rt}$

2. $c = \max_c H \rightarrow \begin{cases} \text{CPO: } \frac{1}{c}e^{-\rho t} - \lambda = 0 \rightarrow c(t) = \frac{e^{-\rho t}}{\lambda(t)} = Be^{(r-\rho)t} & , B = 1/A \\ \text{CSO: } -\frac{1}{c^2}e^{-\rho t} < 0 \end{cases}$

3. $x' = rx - c \rightarrow x' = rx - Be^{(r-\rho)t} \rightarrow x(t) = Ce^{rt} + \frac{B}{\rho}e^{(r-\rho)t} \qquad , x(0) = b > 0$

Notemos que, dado que $r - \rho < 0$, para que $x(t)$ sea acotada (no crezca ni decrezca hasta el infinito cuando t tiende a infinito), es necesario que $C = 0$. Entonces:

$$x(t) = \frac{B}{\rho}e^{(r-\rho)t}$$

Además sabemos que $x(0) = b$, por lo que

$$B = b\rho \rightarrow A = \frac{1}{b\rho}$$

Entonces, reemplazando:

$$c(t) = b\rho e^{(r-\rho)t} \qquad x(t) = be^{(r-\rho)t} \qquad \lambda(t) = \frac{1}{b\rho}e^{-rt}$$

La condición de transversalidad se verifica:

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{b\rho}e^{-rt} = 0$$