Programación Dinámica con horizonte de tiempo infinito
Método recursivo

Marcelo Gallardo Burga

PUCP

Enero 2023

Índice

El problema de optimización

El problema de optimización que buscamos resolver es el siguiente

$$\mathcal{P}_\infty : \begin{cases} \max_{\{x_t\}_{t=0}^{\infty}} & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) \\ s.a. & x_{t+1} \in \Gamma(x_t) \\ & x_0 \text{ dado.} \end{cases}$$

1. $\Gamma : X \to \mathcal{P}(X)$, $X \subset \mathbb{R}^n$ es una correspondencia no vacía, compacta y *continua*.
2. $F \geq 0$.
3. $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$ existe.
4. Eventualmente, se exige que $\exists\ M > 0$ tal que $|F(x, y)| < M$ y ciertamente, $\beta \in (0, 1)$.
5. $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
6. F cóncava.

Observación

En caso se asegure que $|F(x,y)| < M$, como $\beta \in (0,1)$ y $F \geq 0$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) \leq \frac{M}{1-\beta}.$$

Correspondencias

Sea $\Gamma : X \to \mathcal{P}(Y)$ (también se denota $\Gamma : X \rightrightarrows Y$), donde X y Y son dos espacios topológicos.

Definición

Decimos que Γ es *upper-hemicontinua* si dados $x \in X$, $\Gamma(x) \in 2^Y$, $\forall\ \mathcal{N}_{\Gamma(x)} \in \mathcal{T}_Y$, $\exists\ V_x \in \mathcal{T}_X$ tal que $\forall\ z \in V_x$, $\Gamma(z) \subset \mathcal{N}_{\Gamma(x)}$. Esto para todo $x \in X$.

Definición

Decimos que Γ es *lower-hemicontinua* si $\forall \mathcal{N}$ tal que $\mathcal{N} \cap \Gamma(x) \neq \emptyset$, $\exists\ V_x$ tal que dado $z \in V_x$, $\Gamma(z) \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$. Esto para todo $x \in X$.

Definición

Decimos que Γ es continua cuando es a la vez *lower-hemicontinua* y *upper-hemicontinua*

Correspondencias

Ejemplo

Consideremos la correspondencia que se había definido para el problema de los hogares,

$$\Gamma(x) = [0, f(x) + (1-\delta)x],$$

donde f es una función de producción clase C^2. Entonces, si $[0, f(x) + (1-\delta)x] \subset (a, b)$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $|x - z| < \delta$

$$[0, f(z) + (1-\delta)z] \subset (a, b).$$

Básicamente nos preocupa que $f(z) + (1-\delta)z < b$. Pero, como $g(t) = f(t) + (1-\delta)t$ es continua, se puede asegurar lo deseado. Ahora, respecto a la *lower-hemicontinuity* si $[0, f(x) + (1-\delta)x] \cap (a, b)\ \not\emptyset$, es posible encontrar $z \in B(x, \delta)$ tal que $[0, f(z) + (1-\delta)z] \cap (a, b) \neq \emptyset$. Nuevamente, gracias a la continuidad de g.

Ejemplo

Sea $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$

$$\Gamma(x) = \begin{cases} 0, & \mathrm{x} \neq 0 \\ \mathbb{R}, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Esta correspondencia es upper-hemicontinuous pero no lower-hemicontinuous. En efecto, sea $x \neq 0$, $\Gamma(x) = 0$, $\mathcal{N} = (-\delta, \delta)$ y $z \in \mathcal{V}_x = (x - |x|/2, x + |x|/2)$, entonces $\Gamma(z) = 0 \in \mathcal{N}$. Si $x = 0$, entonces $\Gamma(x) = \mathbb{R} \subset V_{\Gamma(x)}$. Entonces, para cualquier vecindad de x, $\Gamma(z) = 0 \in \mathbb{R}$ $(z \neq 0)$. Ahora, veamos que no es l.h.c. Si $x = 0$, y tomamos $z \in (-\delta, \delta) - \{0\}$, $\Gamma(z) = 0$. Así, para $\mathcal{N} = (1, 2)$, $\mathcal{N} \cap \Gamma(z) = \emptyset$.

Definition

El conjunto $\tilde{x} = \{x_t\}_{t=0}^{\infty}$ se conoce como plan y

$$\Pi(x_0) = \{\tilde{x} : x_{t+1} \in \Gamma(x_t),\ \forall\ t,\ \ x(0) = x_0\}$$

es el conjunto de planes asequibles. Finalmente,

$$u(\tilde{x}) = \lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$$

el valor del plan.

Definamos

$$\begin{aligned} V^*(x_0) &= \sup_{\{x_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) \\ & x_{t+1} \in \Gamma(x_t) \\ & x_0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

Nuestro objetivo, recordemos, es obtener un plan $\tilde{x}^* \in \Pi(x_0)$ tal que $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t^*, x_{t+1}^*) = V^*(x_0)$.

Principio de optimalidad

Por un lado, tenemos el problema secuencial

$$V^*(x_0) = \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1}), \;\; s.a.: \;\; x_{t+1} \in \Gamma(x_t).$$

Observación

El problema se escribe también, de forma más compacta, $V^*(x_0) = \max_{\tilde{x} \in \Pi(x_0)} u(\tilde{x})$.

Entonces, nuestro objetivo es encontrar el plan x^* que nos permite alcanzar dicho valor V^* dada la condición inicial. Por otro lado, definamos la siguiente ecuación funcional (de Bellman)

$$V(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} \left\{ F(x, y) + \beta V(y) \right\}. \tag{1}$$

Resolver (1) es encontrar V que satisface la ecuación funcional. Definamos también la correspondencia

$$G(x) = \text{argmax}_{y \in \Gamma(x)} \{F(x, y) + \beta V^*(y)\}.$$

Proposición

Supóngase que $V^*(x)$ está bien definida (alternativamente, que se cumplan todos los supuestos). Entonces, para todo $x \in X$, V^* satisface la ecuación funcional.

Prueba.

Sea $x_0 \in X$ arbitrario y $\{x_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ plan óptimo (factible y que maximiza):

$$V^*(x_0) = F(x_0, x_1^*) + \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t F(x_t^*, x_{t+1}^*) \geq \underbrace{F(x_0, x_1) + \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1})}_{\forall\ \tilde{x} \in \Pi(x_0)}.$$

Sea $x_1 \in \Gamma(x_0)$ arbitrario, y sea $\{x_t\}_{t=1}^{\infty}$ un plan óptimo partiendo desde x_1. Es decir,

$$V^*(x_1) = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} F(x_t, x_{t+1}).$$

□

Prueba.

Entonces,

$$F(X_0, x_1^*) + \beta \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} F(x_t^*, x_{t+1}^*) \geq F(x_0, x_1) + \beta V^*(x_1), \ \forall \ x_1 \in \Gamma(x_0).$$

En particular, tomando $x_1 = x_1^*$,

$$\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} F(x_t^*, x_{t+1}^*) \geq V^*(x_1^*).$$

No obstante, $\{x_t^*\}_{t=1}^{\infty}$ es factible partiendo de x_1^*. Así,

$$\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} F(x_t^*, x_{t+1}^*) = V^*(x_1^*).$$

De este modo,

$$V^*(x_0) = F(x_0, x_1^*) + \beta V^*(x_1) \geq F(x_0, x_1) + \beta V^*(x_1), \ \forall \ x_1 \in \Gamma(x_0),$$

lo cual nos permite concluir haciendo $x_1 = y$ y $x = x_0$. □

Preliminares

Lema

Supongamos que todos los supuestos se satisfacen. Entonces, dado un plan $\tilde{x} \in \Pi(x_0)$

$$u(\tilde{x}) = F(x_0, x_1) + \beta u(\tilde{x}')$$

donde $\tilde{x} = (x_0, x_1, ...)$ y $\tilde{x}' = (x_1, x_2, ...)$.

Prueba.

$$\begin{aligned}
u(\tilde{x}) &= \lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) \\
&= F(x_0, x_1) + \lim_{T\to\infty} \sum_{t=1}^{T} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) \\
&= F(x_0, x_1) + \beta \lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \beta^t F(x_{t+1}, x_{t+2}) \\
&= F(x_0, x_1) + \beta u(\tilde{x}').
\end{aligned}$$

$\square$

Definición

Diremos que V satisface la ecuación funcional si

1. Si $|V(x)| < \infty$, $V(x) \geq F(x,y) + \beta V(y)$ para todo $y \in \Gamma(x)$ y dado $\varepsilon > 0$, existe $y \in \Gamma(x)$ tal que
$$V(x) \leq F(x,y) + \beta V(y) + \varepsilon.$$
2. Si $V(x) = \infty$, existe una sucesión $y_k \in \Gamma(x)$ tal que $\lim_{k\to\infty}[F(x,y_k) + \beta V(y_k)] = \infty$.
3. Si $V(x) = -\infty$, $F(x,y) + \beta V(y) = -\infty$ para cualquier $y \in \Gamma(x)$.

Observación

Dado los supuestos *más robustos*, nos interesamos únicamente en la primera condición.

Resultados y principio de optimalidad

Theorem

Sea V solución de (1) (FE). Supongamos que se satisfacen los supuestos y que

$$\lim_{n \to \infty} \beta^n v(x_n) = 0, \ \forall \ \tilde{x} \in \Pi(x_0).$$

Entonces $V = V^*$.

Resultados y principio de optimalidad

Prueba.

Por un lado, por la definición de solución a(1)

$$
\begin{aligned}
V(x_0) &\geq F(x_0, x_1) + \beta V(x_1), \\
&\geq F(x_0, x_1) + \beta(F(x_1, x_2) + \beta V(x_2)) \\
&= F(x_0, x_1) + \beta F(x_1, x_2) + \beta^2 V(x_2) \\
&\vdots \\
&\geq \sum_{t=0}^{n} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) + \beta^{n+1} V(x_{n+1}), \ \forall\ n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Acá $x_{t+1} \in \Gamma(x_t)$ en todo momento. Tomando límite,

$$V(x_0) \geq u(\tilde{x}), \ \forall \tilde{x} \in \Pi(x_0).$$

$\square$

Prueba.

Ahora, sea $\varepsilon > 0$ y $\{\delta_t\}_t \in \mathbb{R}_+$ de forma que $\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1}\delta_t \leq \varepsilon/2$. Como V cumple la FE

$$\begin{aligned}
V(x_t) &\leq F(x_t, x_{t+1}) + \beta V(x_t) + \delta_t, \ \forall \ t \\
&\leq \sum_{t=0}^{n} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) + \beta^{n+1} V(x_n) + \sum_{t=0}^{n} \delta_{t+1}\beta^t \\
&\leq u_n(\tilde{x}) + \beta^{n+1} V(x_{n+1}) + \varepsilon/2, \ \ n = 1, ..., 2 \\
&\leq u_n(\tilde{x}) + \varepsilon \ (n \to \infty).
\end{aligned}$$

□

Resultados y principio de optimalidad

Ejemplo

Veamos que si se viola el supuesto (condición de transversalidad), puede que $V \neq V^*$.

$$\begin{cases} \max & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\ & \text{s.a } 0 \leq c_t \leq x_t - \beta x_{t+1} \end{cases}$$

Notemos que haciendo $R = 1/\beta - 1$[a], se convierte en un problema de retorno-consumo. Luego, $x_t = \beta^{-t} x_0 \in \Pi(x_0)$ por lo que se viola la condición de transversalidad pues

$$\lim_{t \to \infty} \beta^t v(x_t) = x_0 \neq 0$$

dado que

$$v(x) = \sup_{y \leq x/\beta} \{x - \beta y + \beta v(y)\}$$

admite por solución $v(x) = x$. Sin embargo, $v^* = \infty$ dado que, se puede endeudar consumiendo $x_0 \beta^{-t}$.

[a] $\beta = \frac{1}{1+R}$, R el interés, puede prestar o endeudarse.

Theorem

Supongamos que todos los supuestos se satisfacen y que $\tilde{x}^* \in \Pi(x_0)$ *es óptimo, o sea* $u(\tilde{x}) = v^*(x_0)$. *Entonces,*

$$v^*(x_t^*) = F(x_t^*, x_{t+1}^*) + \beta v^*(x_{t+1}^*).$$

Acá $v = V$.

Theorem

Supongamos que todos los supuestos se satisfacen y que $\tilde{x}^* \in \Pi(x_0)$ *y*

$$\lim_{t\to\infty} \sup \beta^t v^*(x_t^*) \leq 0. \tag{2}$$

Entonces, $\tilde{x}^*$ *es tal que* $u(\tilde{x}^*) = v^*(x_0)$.

Prueba.

El plan $\tilde{x}^* \in \Pi(x_0)$ y satisface

$$v^*(x_t^*) = F(x_t^*, x_{t+1}^*) + \beta v^*(x_{t+1}^*).$$

Luego, por inducción

$$v^*(x_0) = u_n(\tilde{x}^*) + \beta^{n+1} v^*(x_{n+1}^*), \ \ n = 1, 2...$$

Luego, usando (2), $v^*(x_0) \leq u(\tilde{x}^*)$. $\square$

Observación

El ejemplo anterior puede ajustarse acotando inferiormente la riqueza x_t de forma que el individuo no puede endeudarse hasta el punto de quedarse sin dinero.

Retornos acotados

Retornos acotados

Supongamos que $|F| < M$ para cierto $M > 0$. Nuestro objetivo es ahora resolver la ecuación funcional, obtener V que satisfaga (1). En efecto, usando los Teoremas (3) y (4),el conjunto maximizador $\{x_t^*\}$ del problema $\mathcal{P}^\infty$ es generado por

$$G^*(x) = \{y \in \Gamma(x) : v^*(x) = F(x,y) + v^*(y)\}.$$

Punto fijo

Definamos el operador T sobre el espacio de funciones continuas y acotadas que van de X a $\mathbb{R}$:

$$(Tf)(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} [F(x, y) + \beta f(y)].$$

Así, $TV = V$. Nuestros objetivos son los siguientes:

1. Demostrar que $T : C(X) \to C(X)$.
2. Especificar la naturaleza de $C(X)$.
3. Aplicar el Teorema del Punto Fijo de Banach.
4. Establecer como obtener V usando el argumento del punto fijo.
5. Ejemplo.

Punto fijo

Observación

El operador T está definido sobre el espacio métrico (S, ρ)

$$S = \{f : X \to \mathbb{R} : \text{ continua y acotada}\}$$

$$||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

y

$$\rho(f, g) = ||f - g|| = \sup_{x \in X} ||f(x) - g(x)||.$$

Proposición

El espacio métrico (S, ρ) es completo. Más aún, es un espacio vectorial normado completo.

Prueba.

El hecho que $S = \mathcal{B}(X)$ es un espacio vectorial es por definición. Asimismo, lo es que $||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ sea una norma. Queda entonces mostrar que es completo. Sea $\{f_n\}$ de Cauchy. Entonces, buscamos probar que existe $f \in S$ de forma que, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe N_ε de forma que $||f_n - f|| \leq \varepsilon$ para todo $n \geq N_\varepsilon$. Primero, la sucesión de números reales $\{f_n(x)\}$ cumple lo siguiente

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| = ||f_n - f_m||.$$

Entonces, como $\mathbb{R}$ es completo, existe $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f_n \to f$. Ahora, veamos que $||f_n - f|| \to 0$. Dado $\varepsilon > 0$, escogemos N_ε tal que $||f_n - f_m|| \leq \varepsilon/2$. Luego,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &\leq ||f_n - f_m|| + |f_m(x) - f(x)| \\ &\leq \varepsilon/2 + |f_m(x) - f(x)|. \end{aligned}$$

$\square$

Prueba.

Como $\{f_m(x)\}$ converge a $f(x)$, se escoge separadamente m de forma que $|f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2$. Así, $||f_n - f|| \leq \varepsilon$, $n \geq N_\varepsilon$. Finalmente, queda probar que f es acotada y continua. El hecho que sea acotada es consecuencia de que $|f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)|$, para todo n y $x \in X$. Luego, dado $\varepsilon > 0$, buscamos $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \text{ si } ||x - y||_2 < \delta.$$

Escojamos k de forma que $||f - f_k|| < \varepsilon/3$. Dado que $f_n \to f$ con la norma del supremo, esto es posible. Así, escogemos $\delta > 0$ de forma que

$$||x - y||_2 < \delta \implies |f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon/3.$$

Recordemos que f_k es continua. Por ende,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| \\ &\leq 2||f - f_k|| + |f_k(x) - f_k(y)| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Lema

Sean $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ y $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ continua. Si Γ es tal como mencionado previamente, entonces $h(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} f(x, y)$ es continua y la correspondencia $G : X \to Y$ definida por

$$G(x) = \{y \in \Gamma(x) : f(x, y) = h(x)\}$$

es no vacía, a valores compacto y hemicontinua superiormente.

Intuición: fijamos $\varepsilon > 0$, queremos $\delta > 0$ tal que $|h(x) - h(\tilde{x})| < \varepsilon$ si $x \simeq \overline{x}$ $(||x - \tilde{x}|| < \delta)$. Como f es continua y $\Gamma(x)$ también, entonces $\Gamma(x) \simeq \Gamma(\overline{x})$, $y^* \in \Gamma(x)$ y $\overline{y}^* \in \Gamma(\overline{x})$ son tales que $y^* \simeq \overline{y}^*$ y así, como $x \simeq \overline{x}$

$$f(x, \overline{y}^*) \simeq f(\overline{x}, \overline{y}^*).$$

Luego, $G(x)$ es compacta dado que $\Gamma(x)$ lo es y f es continua. Es u.h.c por lo mismo. Formalicemos

Definición

Γ es u.h.c. si para toda sucesión x_n tal que $x_n \to x$ y toda sucesión tal que $y_n \in \Gamma(x_n)$, existe y_{n_k} tal que $y_{n_k} \to y \in \Gamma(x)$.

Definición

Γ es l.h.c. si dado $x \in X$, $\Gamma(x)$ es no vacía y para todo $y \in \Gamma(x)$ y $x_n \to x$, existe $N \geq 1$ y $\{y_n\}_{n=N}^{\infty}$ tal que $y_n \to y$ y $y_n \in \Gamma(x_n)$ para todo $n \geq N$.

Prueba.

Sea $x \in \Gamma(x)$, no vacía y compacta y $f(x, \cdot)$ continua, entonces, el máximo es alcanzado (T.W.) y $G(x)$, el conjunto de maximizadores, es no vacío. Luego, $G(x) \subset \Gamma(x)$ por lo que es acotada. Sea $y_n \to y$ tal que $y_n \in G(x)$, como $\Gamma(x)$ es compacta $y \in \Gamma(x)$. Luego, $h(x) = f(x, y_n)$ es continua y así $f(x, y) = h(x)$ (pues se maximiza en $y \in \Gamma(x)$). Con lo cual, $y \in G(x)$. Veamos ahora que G es u.h.c. Sea $x_n \to x$ y $y_n \in G(x_n)$. Como Γ es l.h.c., existe $y_{n_k} \to y \in \Gamma(x)$. Sea ahora $z \in \Gamma(x)$, $\exists\ z_{n_k} \to z$, con $z_{n_k} \in \Gamma(x_{n_k})$, pues Γ es l.h.c.

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) \geq f(x_{n_k}, z_{n_k}) \implies f(x, y) \geq f(x, z) \implies y \in G(x).$$

La continuidad de h se obtiene por argumentos similares (ver Lucas, Stockey y Prescott p. 62). □

Proposición

$T : S \to S$. Es decir, $T(f) \in S$.

Prueba.

Aplicando el Lema (2),

$$h(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} \{F(x,y) + \beta f(y)\}.$$

es continua. Luego, como F y f son acotadas, $h(x)$ también. $\square$

Blackwell

Proposición

Condiciones de Blackwell. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{B}(X)$ el espacio de las funciones acotadas continuas $f : X \to \mathbb{R}$ con la norma del supremo. T es una contracción con módulo β si

1. Si $f, g \in \mathcal{B}(X)$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$, entonces $T(f)(x) \leq T(g)(x)$ para todo $x \in X$.
2. Existe $\beta \in (0, 1)$ tal que $T(f + a)(x) \leq T(f)(x) + \beta a$ para todo $f \in \mathcal{B}(X)$, $a \geq 0$, $x \in X$.

Blackwell

Prueba.

Si $f(x) \leq g(x)$, $\forall\ x \in X$, denotamos $f \leq g$. Luego,

$$f \leq g + ||f - g||.$$

Debido a las premisas,

$$T(f) \leq T(g + ||f - g||) \leq T(g) + \beta||f - g||.$$

En caso $g \leq f$, $T(g) \leq T(f) + \beta||f - g||$. Así,

$$||T(f) - T(g)|| \leq \beta||f - g||.$$

$\square$

Las condiciones de Blackwell se satisfacen en el caso de

$$T(f)(x) = \sup_{y \in \Gamma(x)} \{F(x,y) + \beta f(y)\}.$$

En efecto, si $f \leq g$

$$F(x,y) + \beta f(y) \leq F(x,y) + \beta g(y)$$
$$\sup_{y \in \Gamma(x)} \{F(x,y) + \beta f(y)\} \sup_{y \in \Gamma(x)} \{\leq F(x,y) + \beta g(y)\}$$
$$T(f)(x) \leq T(g)(x).$$

y

$$\begin{aligned} T(f+a)(x) &= \sup_{y \in \Gamma(x)} \{F(x,y) + \beta[f(y) + a]\} \\ &= T(f)(x) + \beta a. \end{aligned}$$

Proposición

Si (S, ρ) es un espacio métrico completo y $T : S \to S$ es una contracción con módulo β, entonces

1. T posee un único punto fijo V en S.
2. Para cualquier $V_0 \in S$, $\rho(T^n V_0, V) \leq \beta^n \rho(V_0, V)$, $n = 0, 1, 2 \ldots$

Prueba.

(a) Sea $V_n = T^n V_0$. Como T es una contracción de módulo $\beta > 0$

$$
\begin{aligned}
\rho(V_2, V_1) &= \rho(TV_1, TV_0) \leq \beta\rho(V_1, V_0) \\
\rho(V_3, V_2) &= \rho(TV_2, TV_1)\beta\rho(V_2, V_1) \leq \beta^2\rho(V_1, V_0) \\
&\vdots \\
\rho(V_{n+1}, V_n) &\leq \beta^n\rho(V_1, V_0).
\end{aligned}
$$

Así, para cualquier $m > n$, usando la desigualdad triangular, □

Prueba.

$$
\begin{aligned}
\rho(V_m, V_n) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \rho(V_{k+1}, V_k) \\
&\leq \left[\sum_{k=n}^{m-1} \beta^k\right] \rho(V_1, V_0) \\
&\leq \frac{\beta^n}{1-\beta} \rho(V_1, V_0).
\end{aligned}
$$

Así, $\{V_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Como S es completo, $V_n \to V \in S$. Queda probar que V es un punto fijo. Para cualquier $n \geq 0$

$$
\begin{aligned}
\rho(TV, V) &\leq \rho(TV, T^n V_0) + \rho(T^n V_0, V) \\
&\leq \beta \rho(V, T^{n-1} V_0) + \rho(T^n V_0, V).
\end{aligned}
$$

Sin embargo, $V_n, V_{n-1} \to V$. Así,

$$
\lim_{n\to\infty} \rho(V, T^{n-1} V_0) + \rho(T^n V_0, V) = 0.
$$

□

Prueba.

Por lo que, $\rho(TV, V) < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Por el $\varepsilon-$principio, $\rho(TV, V) = 0$. Finalmente, el punto fijo es único dado que

$$\rho(V, V') = \rho(TV, TV') \leq \beta\rho(V, V') \implies \rho(V, V') = 0.$$

(b) Como $T^n = T[T^{n-1}]$

$$\begin{aligned}
\rho(T^n V_0, V) &= \rho(T[T^{n-1}]V_0, TV) \\
&\leq \beta\rho(T^{n-1}V_0, V) \\
&\vdots \\
&\leq \beta^n\rho(V_0, V).
\end{aligned}$$

$\square$

Nos queda, vía ejemplos, aplicar el argumento del punto fijo y encontrar soluciones a los problemas $\mathcal{P}_\infty$. Los procedimientos son muy particulares y no generalizables. Luego, se hará la demostración del método vía la Ecuación de Euler y presentaremos modelos de crecimiento, como el de la acumulación del capital humano y el learning by doing.

Gracias