Control óptimo en tiempo discreto

Marcelo Gallardo Burga

PUCP

Diciembre 2022

Índice

Programación Dinámica

1. Bellman 1957.
2. Tiempo discreto, N etapas, dinámica.
3. Condición inicial x_0.
4. Variable de control $u(k) \in \mathbb{R}^m$, variable de estado $x(k) \in \mathbb{R}^n$.

Fundamentos

La evolución del sistema, está descrita en este caso por un sistema de ecuaciones en diferencias

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k), \;\; k = 0, 1, ..., N-1,$$

$$f : D_1 \times D_2 \times \{0, ..., N-1\} \to \mathbb{R}^n,$$

donde $D_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $D_2 \subset \mathbb{R}^m$. Por otro lado,

$$u(k) \in \Omega(k) \subset \mathbb{R}^m.$$

Esto significa que para cada k, el conjunto de oportunidad de la variable de control puede cambiar.

El funcional objetivo $J : X \to \mathbb{R}$ es del tipo

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} F(x(k), u(k), k) + S(x(N)),$$

donde

$$F : D_1 \times D_2 \times \{0, ..., N-1\} \to \mathbb{R}$$
$$S : D_1 \to \mathbb{R}.$$

El sistema parte del estado $x(0) = x_0$ y se escoge $u(0) \in \Omega(0)$. A J se le agrega $F(x(0), u(0), 0)$, y se inicia el periodo siguiente, teniendo en cuenta que

$$x(1) = f(x(0), u(0), 0).$$

Así sucesivamente hasta

$$x(N) = f(x(N-1), u(N-1), N-1), \ \ u(N-1) \in \Omega(N-1).$$

Definición

Un control admisible es un control tal que $u(k) \in \Omega(k)$, $\forall\ 0 \leq k \leq N-1$.

Definición

Un control óptimo es un control admisible que maximiza el funcional objetivo J.

Observación

El problema que se busca entonces resolver es el siguiente

$$\mathcal{P}:\begin{cases} \max_{\{u(k)\}_{k=0}^{N-1}} & J=\sum_{k=0}^{N-1} F(x(k),u(k),k)+S(x(N)) \\ s.a.: & x(k+1)=f(x(k),u(k),k) \\ & x(0)=x_0 \\ & u(k)\in\Omega(k),\ \ k=0,1,...,N-1. \end{cases}$$

Podríamos poner min en vez de max.

Proposición

Para cualesquiera $j, r \in \{0, 1, ..., N-1\}$ con $j < r$, se verifica que $x(r)$ depende únicamente de $x(j)$ y de los controles

$$\{u(j), u(j+1), ..., u(r-1)\}.$$

Es decir, dado el estado $x(j)$ (fijado j) en el que se encuentra el sistema dinámico al comienzo de la etapa $j+1$, para cualquier etapa posterior r, se verifica que el estado $x(r)$ depende exclusivamente de $x(j)$ y de los controles u que se apliquen entre las etapas $j+1$ y r. Matemáticamente, $x(r) = \Psi(x(j), u(j), u(j+1), ..., u(r-1))$.

Prueba.

Tenemos que

$$x(j+1) = f(x(j), u(j), j).$$

Luego,

$$x(j+2) = f(x(j+1), u(j+1), j+1) = f(f(x(j), u(j), j), u(j+1), j+1),$$

y así hasta obtener

$$\begin{aligned} x(r) &= f(x(r-1), u(r-1), r-1) \\ &= f(f(x(r-2), u(r-2), r-2), u(r-1), r-1) \\ &= \vdots \\ &= \Psi(x(j), u(j), u(j+1), ..., u(r-1)). \end{aligned}$$

Ciertamente, todo depende del periodo implícitamente. $\square$

¿Qué implica esto? Dado x_0, los controles $\{u(0), u(1), ..., u(N-1)\}$ determinan los estados. En ese sentido,

$$J = J_0\{x_0, u[0, ..., N-1]\}$$

con

$$u[0, ..., N-1] = \{u(0), u(1), ..., u(N-1)\}.$$

Lema

Sean D y D' dos conjuntos arbitrarios. Sean g y h funciones cuyos dominios de definición son D y $D \times D'$ respectivamente. Entonces,

$$\max_{(y,z)\in D\times D'} \{g(y) + h(y,z)\} = \max_{y\in D} \left\{ g(y) + \max_{z\in D'}\{h(y,z)\} \right\}.$$

Siempre y cuando la solución exista.

Prueba.

Primero,

$$\max_{(y,z)\in D\times D'}\{g(y)+h(y,z)\}\geq g(y)+h(y,z),\ \forall\ y\in D,\ \forall\ z\in D'.$$

En particular,

$$\max_{(y,z)\in D\times D'}\{g(y)+h(y,z)\}\geq g(y)+\max_{z\in D'}\{h(y,z)\},\ \forall\ y\in D.$$

Así

$$\max_{(y,z)\in D\times D'}\{g(y)+h(y,z)\}\geq \max_{y\in D}\left\{g(y)+\max_{z\in D'}\{h(y,z)\}\right\}.$$

□

Prueba.

Queda entonces por demostrar la otra desigualdad. Primero,

$$h(y,z) \leq \max_{z\in D'}\{h(y,z)\}, \ \forall\ y \in D, z \in D'.$$

Luego, para todo $y \in D$ y $z \in D'$

$$g(y) + h(y,z) \leq g(y) + \max_{z\in D'}\{h(y,z)\} \leq \max_{y\in D}\left\{g(y) + \max_{z\in D'}\{h(y,z)\}\right\}.$$

De donde

$$\max_{(y,z)\in D\times D'}\{g(y) + h(y,z)\} \leq \max_{y\in D}\left\{g(y) + \max_{z\in D'}\{h(y,z)\}\right\}.$$

$\square$

Proposición

Sea $J^*(x_0)$ el valor óptimo del funcional objetivo del problema $\mathcal{P}$. Entonces,

$$J^*(x_0) = J_0^*\{x_0\}$$

en donde la función J_0^* viene dada por el último paso del siguiente algoritmo, que comienza al final del horizonte temporal N, y va hacia el principio:

$$\begin{aligned} J_N^*\{x(N)\} &= S[x(N)] \\ J_k^*\{x(k)\} &= \max_{u(k)\in\Omega(k)} \{F(x(k), u(k), k) + J_{k+1}^*\{f(x(k), u(k), k)\}\}. \end{aligned}$$

Estas se conocen como las ecuaciones de Bellman. Más aún, si $u^*(k)$ maximiza la expresión $F(x(k), u(k), k) + J_{k+1}^*\{f(x(k), u(k), k)\}$ en función de $x(k)$, entonces $u^*(k)$ es el control óptimo del problema.

Prueba.

Ciertamente

$$J^*(x_0) = \max_{u(0)\in\Omega(0),\ldots,u(N-1)\in\Omega(N-1)} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} F(x(k),u(k),k) + S(x(N)) \right\}.$$

Debido a la propiedad de causalidad y el Lema (1), la suma puede descomponerse

$$J^*(x_0) = \max_{u(0)\in\Omega(0)} \left\{ F(x(0),u(0),0) + \max_{\{u(k)\in\Omega(k)\}_{k=1}^{N-1}} \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} F(x(k),u(k),k) + S(x(N)) \right\} \right\}.$$

$\square$

Prueba.

Y así, sucesivamente

$$J^*(x_0) = \max_{u(0)\in\Omega(0)} \{F(x(0),u(0),0) + \max_{u(1)\in\Omega(1)} \{F(x(1),u(1),1) + \dots$$
$$+ \max_{u(N-1)\in\Omega(N-1)} \{F(x(N-1),u(N-1),N-1) + S(x(N))\}\}\}.$$

Por otro lado, recordemos que la maximización está sujeta a

$$x(k+1) = f(x(k),u(k),k), \;\; x(0) = x_0.$$

$\square$

Prueba.

Definimos ahora

$$
\begin{aligned}
J_N^*\{x(N)\} &= S(x(N)) \\
J_{N-1}^*\{x(N-1)\} &= \max_{u(N-1)\in\Omega(N-1)} \{F(x(N-1), u(N-1), N-1) \\
&+ S(x(N))\} \\
&= \max_{u(N-1)\in\Omega(N-1)} \{F(x(N-1), u(N-1), N-1) \\
&+ S(f(x(N-1), u(N-1), N-1))\}
\end{aligned}
$$

y así sucesivamente hasta que

$$
J_0^*\{x(0)\} = \max_{u(0)\in\Omega(0)} \{F(x(0), u(0), 0) + J_1^*\{ \underbrace{x(1)}_{=f(x(0),u(0),0)} \}\}.
$$

$\square$

Factor de descuento

Factor de descuento

Sea $\beta \in (0,1)$

$$\begin{cases} \max_{\{u(k)\}_{k=0}^{N-1}} & J = \sum_{k=0}^{N-1} \beta^k F[x(k), u(k), k] + \beta^N S[x(N)] \\ s.a. & x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \\ & x(0) = x_0 \\ & u(k) \in \Omega(k). \end{cases}$$

Factor de descuento

Siguiendo la lógica del algoritmo de Bellman:

$$J_N^*\{x(N)\} = \beta^N S[x(N)] \tag{1}$$

y, para $k \in [0, N-1]$,

$$J_k^*\{x(k)\} = \max_{u(k)\in\Omega(k)} \left\{\beta^k F[x(k), u(k), k] + J_{k+1}^*\{f(x(k), u(k), k\}\right\}. \tag{2}$$

Factor de descuento

Proposición

Las ecuaciones (1) y (2), son equivalentes a formular el siguiente algoritmo

$$V_N^*\{x(N)\} = S[x(N)]$$

$$V_k^*\{x(k)\} = \max_{u(k)\in\Omega(k)} \{F[x(k), u(k), k] + \beta V_{k+1}^*\{\underbrace{f(x(k), u(k), k)}_{=x(k+1)}\}\}.$$

Observación

Esto implica por un lado que

$$V_N^*\{x(N)\} = \frac{1}{\beta^N} J_N^*\{x(N)\} = S[x(N)].$$

Factor de descuento

Prueba.

Definamos

$$V_k^*\{x(k)\} = \frac{1}{\beta^k} J_k^*\{x(k)\}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} V_k^*\{x(k)\} &= \frac{1}{\beta^k} \max_{u(k)\in\Omega(k)} \left\{\beta^k F(x(k), u(k), k) + J_{k+1}^*\{x(k+1)\}\right\} \\ &= \max_{u(k)\in\Omega(k)} \left\{F(x(k), u(k), k) + \frac{1}{\beta^k} J_{k+1}^*\{x(k+1)\}\right\} \\ &= \max_{u(k)\in\Omega(k)} \left\{F(x(k), u(k), k) + \frac{\beta}{\beta^{k+1}} J_{k+1}^*\{x(k+1)\}\right\} \\ &= \max_{u(k)\in\Omega(k)} \{F(x(k), u(k), k) + \beta V_{k+1}^*\{x(k+1)\}\}. \end{aligned}$$

□

Factor de descuento

¿Cuál es la diferencia entre $V_k^*\{x(k)\}$ y $J_k^*\{x(k)\}$?

1. $J_k^*\{x(k)\}$ da el valor óptimo descontado al *periodo 1*, del funcional truncado que contiene los periodos $k+1$ a N, cuyo estado inicial es $x(k)$.
2. $V_k^*\{x(k)\}$ da el valor corriente del periodo $[k, k+1]$ (como si fuese un problema de consumo intertemporal en dos etapas).

Horizonte temporal infinito

Horizonte de tiempo infinito

Consideramos un sistema dinámico (en este contexto, ecuación en diferencias)

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)), \;\; k = 0, 1, 2...$$

con $x(0) = x_0$ y

$$f : D_1(\subset \mathbb{R}^n) \times D_2(\subset \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n.$$

Además, $u(k) \in \Omega(k) \; \forall \; k \in \mathbb{Z}_+$. Nuestro objetivo es ahora analizar

$$J = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} F(x(k), u(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k F(x(k), u(k)).$$

En este contexto, buscamos $\pi^* = \{u_0^*, u_1^*, ...\}$ de forma que resuelva

$$\begin{aligned} \max \; J_\pi &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \beta^k F(x(k), u(k)) \\ s.a. : x(k+1) &= f(x(k), u(k)) \\ x(0) &= x_0 \\ u(k) &\in \Omega(k). \end{aligned}$$

Supuestos y observaciones

Asumimos que existe $M > 0$ tal que $0 < F(x,u) \leq M$, $\forall\ (x,u) \in D_1 \times D_2$. Así, para $\beta \in (0,1)$

$$0 \leq J^*(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} F(x^*, u^*)\beta^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} M\beta^k = \frac{M}{1-\beta} < \infty.$$

Observación

Vamos a trabajar con la función valor V. Sabemos de la definición que $V_0^*(x_0) = J_0^*(x_0)$, para cualquier x_0. Luego, sin pérdida de generalidad,

$$\begin{aligned} V_N^*(x(N)) &= V_N^*(x) = 0,\ x \in D_1 \\ V_\ell(x) &= \max_{u\in\Omega} \{F(x,u) + \beta V_{\ell+1}\{f(x,u)\}\},\ \ell \in \{N-1, N-2, ..., 0\}. \end{aligned}$$

Ahora, haciendo $k = N - \ell$

$$\begin{aligned} V_0(x) &= 0 \\ V_{k+1}(x) &= \max_{u\in\Omega}\{F(x,u) + \beta V_k\{f(x,u)\}\}. \end{aligned}$$

Definiciones

Definición

$$T(V)(x) = \max_{u\in\Omega}\{F(x,u) + \beta V(f(x,u))\}$$

Observación

Sea $k \in \mathbb{Z}$

$$T^0(V)(x) = V(x)$$
$$T^k(V)(x) = T[T^{k-1}(V)](x).$$

Resultados principales

Lema

Sean V y V' dos funciones de D_1 en $\mathbb{R}$, tales que $V(x) \leq V'(x)$, $\forall\ x \in D_1$. Entonces,

$$T^k(V)(x) \leq T^k(V')(x),\ \forall\ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Prueba.

Para $k = 1$

$$T(V)(x) = \max_{u\in\Omega} \left\{ F(x,u) + \beta V[f(x,u)] \right\}.$$

Como $V \leq V'$:

$$\beta V[f(x,u)] \leq \beta V'[f(x,u)]/$$

Así,

$$\begin{aligned} T(V)(x) &= \max_{u\in\Omega} \left\{ F(x,u) + \beta V[f(x,u)] \right\} \\ &\leq \max_{u\in\Omega} \left\{ F(x,u) + \beta V'[f(x,u)] \right\} \\ &= T(V')(x). \end{aligned}$$

$\square$

De ahí, por inducción:

$$T^{k-1}(V)(x) \leq T^{k-1}(V')(x), \ \forall \ x \in D_1$$

$$\begin{aligned} T^k(V)(x) &= T[T^{k-1}(V)(x)] \\ &= \max_{u \in \Omega} \left\{ F(x,u) + \beta T^{k-1}(V(x,u)) \right\} \\ &\leq \max_{u \in \Omega} \left\{ F(x,u) + \beta T^{k-1}(V'(x,u)) \right\} \\ &= T^k(V')(x). \end{aligned}$$

Lema

Sea $e : D_1 \to \mathbb{R}$, de forma que $e(x) = 1$. Entonces, para cada $V : D_1 \to \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}_+$

$$T^k(V + re)(x) = T^k(V)(x) + \beta^k r, \ \ x \in D_1.$$

Prueba.

Por inducción, para $k = 1$

$$\begin{aligned} T(V + re) &= \max_{u\in\Omega} \{F(x, u) + \beta(V + re)(f(x, u))\} \\ &= \max_{u\in\Omega} \{F(x, u) + \beta(V)(f(x, u)) + \beta r\} \\ &= \max_{u\in\Omega} \{F(x, u) + \beta(V)(f(x, u))\} + \beta r \\ &= T(V) + \beta r. \end{aligned}$$

Por inducción, asumiendo que la propiedad se cumple para $k - 1$

$$\begin{aligned} T^k(V + re)(x) &= T[T^{k-1}(V + re)](x) \\ &= \max_{u\in\Omega} \left\{F(x, u) + \beta[T^{k-1}(V + re)](f(x, u))\right\} \\ &= \max_{u\in\Omega} \left\{F(x, u) + \beta[T^{k-1}(V)(f(x, u)) + r\beta^{k-1}]\right\} \\ &= \max_{u\in\Omega} \left\{F(x, u) + \beta[T^{k-1}(V)(f(x, u))]\right\} + \beta^k r \\ &= T^k(V)(x) + \beta^k r, \ \forall \ x \in D_1. \end{aligned}$$

□

Proposición

En relación al problema de optimización con horizonte de tiempo infinito, $V : D_1 \to \mathbb{R}$ acotada,

$$J^*(x) = \lim_{k\to\infty} T^k(V)(x), \ \forall \ x \in D_1.$$

Prueba.

Por un lado

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \beta^k F(x(k), u(k)) \leq \sum_{k=0}^{N-1} \beta^k F(x(k), u(k)) + M \sum_{k=N}^{\infty} \beta^k.$$

Tomando máximos en ambos lados,

$$J^*(x) \leq V_N(x) + \frac{M\beta^N}{1-\beta}, \ \forall \ x \in D_1, \ \ N = 1, 2, \ldots$$

□

Prueba.

Por otro lado, dado que $F(x, u) \geq 0$ para cualesquiera $(x, u) \in D_1 \times D_2$

$$V_N(x) \leq J^*(x), \ \forall \ N \in \mathbb{N}.$$

Así, por el T.S. ($\beta \in (0, 1)$)

$$J^*(x) = \lim_{N \to \infty} V_N(x).$$

Finalmente, $T^k(V_0) = V_k \to J^*$ y, al ser V acotada, podemos encontrar r de forma que

$$V_0 - re \leq V \leq V_0 + re.$$

Así, aplicando el Lema (3)

$$T^k(V_0) - \beta^k re \leq T^k(V) \leq T^k(V_0).$$

Así, $T^k(V) \to J^*$. $\square$

Proposición

J^* verifica

$$J^*(x) = \max_{u\in\Omega} \{F(x,u) + \beta J^*(f(x,u))\}$$

i.e.

$$J^*(x) = T(J^*(x)).$$

Prueba.

Tenemos que

$$V_k \leq J^* \leq V_k + \frac{M\beta^k}{1-\beta}e.$$

Luego, aplicando T

$$V_{k+1} \leq T(J^*) \leq V_{k+1} + \frac{M\beta^{k+1}}{1-\beta}e.$$

Dado que $V_{k+1}, V_{k+1} + \frac{M\beta^{k+1}}{1-\beta} \to J^*$, $T(J^*) = J^*$. □

Gracias