PUCP

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES

MATEMÁTICAS PARA ECONOMISTAS

EXÁMEN PARCIAL

PROFESOR: JORGE R. CHÁVEZ

SEMESTRE 2022-2

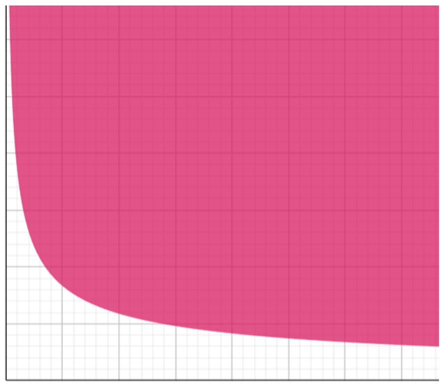
FECHA 11-10-2022

HORA: 8:00-10:00 AM

1. Justificando sus respuestas, diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). **(1.5 puntos cada pregunta)**

1.1) La relación de preferencias asociada a la función de utilidad $u(x_1, x_2) = x_1^{0.5} x_2^{0.5}$ es convexa.

Verdadero (V). La relación de preferencias describe conjuntos de contorno superior que lucen de la siguiente manera:



los cuales son conjuntos convexos para cualquier canasta de la cual se tome el contorno superior. Note que en el caso de una canasta con algún componente nulo, el conjunto de contorno superior es el primer cuadrante, el cual es también un conjunto convexo. Por lo tanto, la relación de preferencias descrita por la función de utilidad dada es convexa. Esto también se puede demostrar formalmente usando la definición de conjunto convexo o notando que la función es cuasicóncava.

1.2) Las relaciones de preferencia son racionales porque el ser humano es racional.

Falso (F). Las relaciones de preferencias son racionales cuando son completas y transitivas. Además, es debatible si los seres humanos son siempre racionales.

1.3) La función $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ es cuasiconvexa.

Verdadero (V). La función $x^2 + y^2$ es convexa, y la función exponencial es creciente y convexa. Por lo tanto, la composición $f(x,y)$ es convexa y, por tanto cuasiconvexa. También se puede probar utilizando el criterio de la hessiana para la convexidad o los determinantes M_r para probar directamente la cuasiconvexidad.

1.4) La función $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ no puede representar una relación de preferencias estrictamente monótona.

Verdadero (V). La función no es estrictamente monótona, pues las curvas de nivel son circunferencias, en donde a mayor radio, mayor valor de la función. O sea, $(-5,-5) \succ (1,1)$.

El siguiente problema es un problema de maximización del beneficio **sin restricciones** en el dominio y sin parámetros, por lo cual, es más sencillo. Además, se usa una especificación CES que facilita los cálculos.

2. Considere el siguiente problema de maximización del beneficio:

$$\max_{k,l} \Pi(k,l) = k^{0.5} + l^{0.5} - 0.2l - 0.2k, \ k,l > 0$$

donde k y l denotan capital y trabajo, respectivamente. Note que el precio del bien producido es igual a uno y los precios de los factores son $w = 0.2$ y $r = 0.2$.

2.1) Obtenga las posibles cantidades de capital y de trabajo que maximizan el beneficio. Muestre sus cálculos. **(2 puntos)**

Por la condición necesaria de primer orden, el posible óptimo es un punto estacionario:

$$\nabla\Pi = \begin{pmatrix} 0.5k^{-0.5} - 0.2 \\ 0.5l^{-0.5} - 0.2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow (k^*, l^*) = (6.25, 6.25)$$

2.2) Verifique si las cantidades obtenidas en la pregunta 2.1) maximizan, en efecto, el beneficio. **(2 puntos)**

Por la condición suficiente de primer orden, el punto estacionario será máximo global si la función es cóncava, es decir, si la hessiana de la función es negativo semidefinida:

$$Hf = \begin{pmatrix} -0.25k^{-1.5} & 0 \\ 0 & -0.25l^{-1.5} \end{pmatrix} < 0 \ \forall \ k, l \ > 0$$

Queda demostrado.

2.3) Identificando la función de produccón, verifique que las productividades marginales de los factores son decrecientes. **(2 puntos)**

La función de producción es $f(k, l) = k^{0.5} + l^{0.5}$. Las productividades marginales son

$$\begin{pmatrix} PMg_k \\ PMg_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5k^{-0.5} \\ 0.5l^{-0.5} \end{pmatrix}$$

cuyas derivadas son

$$\begin{pmatrix} PMg'_k \\ PMg'_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.25k^{-1.5} \\ -0.25l^{-1.5} \end{pmatrix}$$

ambas negativas, por lo que las productividades marginales son decrecientes.

El siguiente problema corresponde a un problema de optimización con restricciones, concretamente, el problema de maximización de la utilidad. Se abordan todos los temas relacionados a dicho problema desde el enfoque de las matemáticas, conectando en todo momento con la economía. La especificación es Stone-Geary y, la presencia del r_1 corresponde al hecho que el bien 1 es un bien adictivo.

3. Considere el siguiente problema de maximización de la utilidad:

$$\mathcal{P}_L : \begin{cases} \text{máx} & u(x_1, x_2) = (x_1 - r_1)^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \\ \text{s.a.} & p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq I \\ & x_1 \geq r_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

El bien x_1 se conoce como «adictivo», pues su consumo causa utilidad si se sobrepasa un cierto valor. Asumiendo que $p_1 = p_2 = 1$, $r_1 = 1$, $I = 2$ y $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$; el problema queda entonces re-escrito de la siguiente manera:

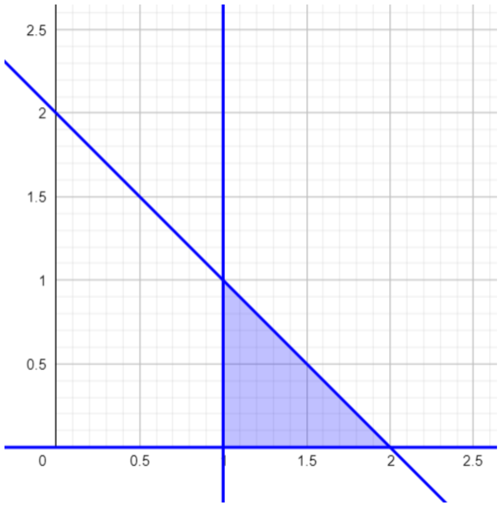
$$\mathcal{P}_L : \begin{cases} \text{máx} & u(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^{0.5} x_2^{0.5} \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.1) Grafique el conjunto factible determinado por las restricciones:

$$\Delta = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 \leq 2\}$$

¿Puede aplicarse el teorema de Weierstrass? Explique. **(2 puntos)**

La gráfica del conjunto factible es



y se puede notar que este es compacto (cerrado y acotado). Además, la función objetivo, la función de utilidad, es continua, por lo que, según el teorema de Weierstrass, el problema $\mathcal{P}_L$ tiene solución.

3.2) ¿Es monótona la relación de preferencias $\succeq$ asociada a la función de utilidad u? ¿Dónde se encuentra la canasta de consumo óptima? Sugerencia: ¿Cómo es la gradiente de la función u en la región de presupuesto? **(2 puntos)**

La gradiente de la función de utilidad es

$$\nabla u = \begin{pmatrix} 0.5(x_1 - 1)^{-0.5} x_2^{0.5} \\ 0.5(x_1 - 1)^{0.5} x_2^{-0.5} \end{pmatrix},$$

la cual tiene dos entradas mayores o iguales a 0 para cualquier punto-canasta en la región de presupuesto, por lo que la relación de preferencias es monótona. Por lo tanto, la canasta óptima se encuentra en donde la restricción presupuestaria se cumple con igualdad (es decir, $x_1 + x_2 = 2$).

3.3) Basándose en el inciso 3.2), resuelva $\mathcal{P}_L$. **(2 puntos)**

Como la gradiente es positiva, podemos graficar la curva de nivel que maximiza la utilidad y contiene a la canasta óptima que pertenece al conjunto de oportunidad:

y notamos que el óptimo es un punto de tangencia entre la restricción presupuestaria y la curva de nivel. La pendiente de la restricción presupuestaria es igual a $x_2' = -1$, mientras que podemos derivar implícitamente la ecuación de la curva de nivel para hallar la pendiente de la misma: $x_2' = -\dfrac{x_2}{x_1 - 1}$. Calculando el punto de tangencia:

$$-1 = -\frac{x_2}{x_1 - 1} \to x_1 = x_2 + 1.$$

Además, en la restricción presupuestaria $x_2 = 2 - x_1$. Por lo tanto,

$$(x_1^*, x_2^*) = (1.5, 0.5)$$

$$u(1.5, 0.5) = 0.5$$

Notemos también que puede resolverse vía Lagrange.

4. Usando la definición, pruebe que el conjunto

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x_1 \leq 2, \ 0 \leq x_2 \leq \ln x_1\}$$

es convexo. Sugerencia: use el hecho de que la función logaritmo es cóncava. **(2 puntos)**

Si $\bar{x}, \bar{y} \in \Omega$:

$$\begin{array}{cc} 1 \leq x_1 \leq 2 & 0 \leq x_2 \leq \ln x_1 \\ 1 \leq y_1 \leq 2 & 0 \leq y_2 \leq \ln y_1 \end{array}$$

Multiplicando la primera fila por λ y la segunda fila por $1-\lambda$:

$$\begin{array}{cc} \lambda \leq \lambda x_1 \leq 2\lambda & 0 \leq \lambda x_2 \leq \lambda \ln x_1 \\ 1-\lambda \leq (1-\lambda)y_1 \leq 2(1-\lambda) & 0 \leq (1-\lambda)y_2 \leq (1-\lambda)\ln y_1 \end{array}$$

Sumando por columnas , tenemos el siguiente resultado:

$$1 \leq \lambda x_1 + (1-\lambda)y_1 \leq 2 \quad , \quad 0 \leq \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2 \leq \lambda \ln x_1 + (1-\lambda)\ln y_1$$

Como la función logaritmo es cóncava, podemos afirmar lo siguiente:

$$\lambda \ln x_1 + (1-\lambda)\ln y_1 \leq \ln(\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1)$$

Entonces, podemos reescribir el resultado anterior como:

$$1 \leq \lambda x_1 + (1-\lambda)y_1 \leq 2 \quad , \quad 0 \leq \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2 \leq \ln(\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1)$$

Por lo tanto:

$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1, \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2) \in \Omega$$
$$\lambda \bar{x} + (1-\lambda)\bar{y} \in \Omega.$$

Entonces, por definición, Ω es un conjunto convexo.