PUCP

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES

MATEMÁTICAS PARA ECONOMISTAS IV

SOLUCIONARIO EXAMEN FINAL

PROFESOR: JORGE R. CHÁVEZ

JEFES DE PRÁCTICA: JOAQUÍN RIVADENERYA & MARCELO GALLARDO

SEMESTRE 2022-2

FECHA 06-12-2022

1.1) La variable de estado es el stock de capital $K(t)$. Por otro lado, la variable de control es la inversión $I(t)$.

1.2) El hamiltoniano es

$$H(K, I, \lambda, t) = e^{-rt}\left(F(K(t) - I - \frac{I^2}{2}\right) + \lambda\left(I - \delta K\right).$$

Por ende, el hamiltoniano valor presente es

$$\overline{H}(K, I, m, t) = F(K(t) - I - \frac{I^2}{2} + m\left(I - \delta K\right),\ m = e^{rt}\lambda.$$

1.3) Aplicando el principio del máximo (para soluciones interiores), se obtienen las siguiente ecuaciones.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{H}}{\partial I} &= -1 - I + m = 0 \\
m' &= rm - \frac{\partial \overline{H}}{\partial K} = rm - \frac{\partial F}{\partial K} + \delta m \\
K' &= I - \delta K,\ K(t_0) = K_0 > 0 \\
\lim_{t\to\infty} e^{-rt} m(t)K(t) &= 0.
\end{aligned}$$

1.4) Usando las dos primera ecuaciones,

$$m' = I' = (r + \delta)m - \frac{\partial F}{\partial K} = (r + \delta)(1 + I) - \frac{\partial F}{\partial K}.$$

2.1) El $\mathcal{P}_D$ en cuestión es

$$\begin{aligned}
&\text{máx} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \underbrace{\sqrt{c(t)}}_{=f(k(t),c(t),t)} \\
&s.a.\ k(t+1) = \underbrace{(1+r)(k(t)-c(t))}_{=g(k(t),c(t),t)} \\
&\quad k(0) = k_0 > 0.
\end{aligned}$$

La función de utilidad es $u(c(t)) = \sqrt{c(t)}$, i.e., $u(\cdot) = \sqrt{\cdot}$. Por otro lado, el factor de descuento es β^t.

2.2) Las ecuaciones de Bellman

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial c(t)} + \beta V'_{t+1} \frac{\partial g}{\partial c(t)} & = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial k(t)} + \beta V'_{t+1} \frac{\partial g}{\partial k(t)} & = V'_t \end{cases}$$

proveen

$$\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{c(t)}} & = \beta(1+r)'_{t+1} \\ \beta(1+r)V'_{t+1} & = V'_t. \end{cases}$$

Luego,

$$V'_t = \frac{1}{2\sqrt{c(t)}} \implies V'_{t+1} = \frac{1}{2\sqrt{c(t+1)}}.$$

Así,

$$\frac{1}{2\sqrt{c(t+1)}} = \frac{1}{2\beta(1+r)\sqrt{c(t)}}.$$

Luego, $c(t+1) = (1+r)^2\beta^2 c(t)$. Así, usando la ecuación de estado, se obtiene efectivamente el sistema

$$\begin{pmatrix} k(t+1) \\ c(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+r & -(1+r) \\ 0 & \beta^2(1+r)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k(t) \\ c(t) \end{pmatrix},$$

cuya solución vine dada por

$$\begin{aligned}
k(t) &= k_0 \beta^{2t}(1+r)^{2t} \\
c(t) &= k_0(1-\beta^2(1+r))\beta^{2t}(1+r)^{2t}.
\end{aligned}$$

3.1) El $\mathcal{P}_v$ en cuestión es

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \int_{t_0}^{t_1} e^{-\delta t}[-p(t)x'(t) - C(x(t))]dt \\ s.a.\ & x(t_0) = x_0 \\ & x(t_1) = x_1. \end{aligned}$$

3.2) La ecuación de Euler provee

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial x'}\left(e^{-\delta t}[-p(t)x'(t) - C(x(t))]\right)\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-\delta t}[-p(t)x'(t) - C(x(t))]\right) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(-e^{-\delta t}p(t)\right) + e^{-\delta t}\frac{\partial C}{\partial x} &= 0 \\ e^{-\delta t}\left(\delta p - p' + C'(x)\right) &= 0 \\ \delta p - p' + C'(x) &= 0. \end{aligned}$$

3.3) Si $C(x) = \alpha x$, $C'(x) = \alpha$ (constante). Tendremos

$$p' = \delta p + \alpha.$$

Con lo cual,

$$p(t) = Ae^{\delta t} - \frac{\alpha}{\delta}$$

donde A es una constante.

4.1)

Wang/Yang	A	B
A	20, 20	0, 0
B	0, 0	10, 10

4.2) (A, A) y (B, B) son EN.

Observación: en la Pregunta 1, si se provee $F(K)$ es posible añadir o sustituir por otra pregunta, analizar el sistema 2×2

$$\begin{cases} I' &= (r + \delta)(1 + I) - F'(K) \\ K' &= I - \delta K. \end{cases}$$

Por ejemplo, podemos usar $F(K) = K^\alpha$ o $F(K) = AK$.