PUCP

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES

MATEMÁTICAS PARA ECONOMISTAS

PRÁCTICA DIRIGIDA 6

PROFESOR: JORGE R. CHÁVEZ

JEFES DE PRÁCTICA: JOAQUÍN RIVADENERYA & MARCELO GALLARDO

SEMESTRE 2022-2

FECHA 15-11-2022

Control Óptimo.

1) Resuelva el siguiente $\mathcal{P}_c$

$$\begin{aligned} \max_u \quad & J = \int_0^1 (2x + 3u)\, dt \\ \text{s.a. :} \quad & x' = 1 - u^2 \\ & x(0) = 2. \end{aligned}$$

2) Considere el siguiente problema de control óptimo

$$\begin{aligned} \max \quad & \int_0^T (K - K^2 - I - I^2) dt \\ s.a. \ & K' = I \\ & K(0) = 2. \end{aligned}$$

1. Si K es el stock de capital e I la inversión, identifique cuál es la variable de control y cuál la de estado.
2. Escriba el Hamiltoniano del problema.
3. Escriba las condiciones necesarias del Principio del Máximo.
4. A partir de estas ecuaciones, plante un sistema bidimensional lineal en términos de K e I.
5. Encuentre las trayectorias solución.

3) Modelo de Ramsey-Cass-Koopsman. Considere el siguiente problema de optimización

$$
\begin{aligned}
\max \int_0^\infty & \sqrt{c(t)}e^{-\rho t}dt \\
s.a.\ k' &= k^\alpha - \delta k - c \\
k(0) &= k_0 \\
0 \leq c(t) &\leq k^\alpha(t).
\end{aligned}
$$

3.1) Caracterice los parámetros del modelo: ρ, α, δ y k_0.

3.2) Identifique la variable de control y la variable de estado.

3.3) Identifique $\Omega(t)$.

3.4) Plantee el Hamiltoniano valor presente.

3.5) Explique porque la solución es interior. Para esto, las propiedades de $u(c) = \sqrt{c}$.

3.6) Aplique el principio del Máximo y obtenga un par de ecuaciones diferenciales que caractericen la solución al problema. Efectúe el diagrama de fases de este sistema. Analice y comente.

4) Extracción de un recurso. Considere el siguiente problema de extracción de un recurso natural x

$$
\begin{aligned}
\max \int_0^\infty & \ln(y(t))e^{-\rho t}dt \\
s.a.\ x'(t) &= y(t) \\
x(0) &= x_0 \\
\lim_{t\to\infty} x(t) &= x_1 \in (0, x_0).
\end{aligned}
$$

4.1) Plantee la función Hamiltoniana valor presente.

4.2) Aplique el principio del Máximo y demuestre que

$$
\begin{aligned}
\mu(t) &= \mu(0)e^{\rho t} \\
y(t) &= \frac{e^{-\rho t}}{\mu(0)},\ \mu(0) > 0.
\end{aligned}
$$

4.3) Demuestre que

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{H}(\cdot)e^{-\rho t} = 0.$$

Cálculo de Variaciones.

5) Demuestre que todo problema de cálculo de variaciones puede escribirse como un problema de control óptimo. Luego, en caso u pueda expresarse en términos de x' y x, demuestre que el problema de control óptimo puede escribirse como uno de cálculo de variaciones.

6) Use los resultados anteriores para plantear el siguiente problema

$$\begin{aligned} \max\ J(x) &= \int_0^{t_1} u(c)e^{-\rho t}dt \\ s.a.\ x' &= rx - c \\ x(0) &= x_0 \\ x(t_1) &= x_1 \end{aligned}$$

como un problema de cálculo de variaciones. Derive la ecuación de Euler-Lagrange tomando $u(c) = \ln(c)$. Acá, $r, \rho > 0$.

7) Resuelva el siguiente problema de optimización dinámica usando la ecuación de Euler-Lagrange[1]

$$\begin{aligned} \max\ J(x) &= \int_0^{t_1} e^{-rt}\sqrt{x'}dt \\ s.a.\ x(0) &= x_0 \\ x(t_1) &= x_1. \end{aligned}$$

8) Resuelva el siguiente problema de cálculo de variaciones

$$\begin{aligned} \max\ J(x) &= \int_{t_0}^{t_1} e^{-\delta t}(ax^2 - bx'^2)dt \\ s.a.\ x(t_0) &= 2 \\ x(t_1) &= 4. \end{aligned}$$

Considere $4a < \delta b$.

[1] $F_x = \frac{d}{dt}F_{x'}$.