Práctica Dirigida 5
Matemática para Economistas IV

Marcelo Gallardo B.

PUCP

Octubre 2022

Hoja de ruta

1. PC3: comentarios.
2. Solow.
3. Sistemas lineales.
4. Sistemas no lineales.
5. Figuras: Matlab, Wolfram Mathematica.

Modelo de Solow

Solow

$$k'(t) = sf(k(t)) - (n+\delta)k(t)$$

1. Concavidad, creciente, derivada en 0 y en ∞.
2. Note que para $f(k) = \sqrt{k}$ se puede resolver vía Bernouilli mientras que para $f(k) = \ln(k)$, no de forma directa.
3. ¿Si $f(k) = k^{\gamma}$?
4. $0 < \gamma < 1$ (¿porqué?)
5. $k^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$.
6. $\gamma = 1/2$.

Solow

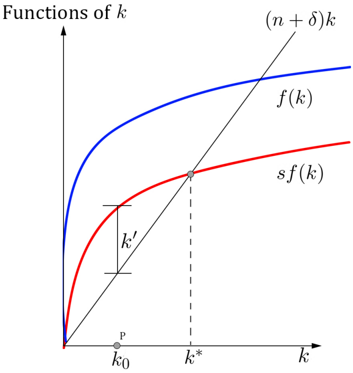

Figura $s = 1$ y $s < 1$.

Sistemas bidimensionales
Análisis Cualitativo

Sistemas lineales

Considere el siguiente sistema lineal

$$x' = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Encuentre el subespacio estable e inestable.

1. Primero, calculamos el polinomio característico $p(t)$.
2. Luego, obtenemos los valores propios, $p(\lambda) = 0$.
3. Enseguida, obtenemos los vectores propios, i.e., aquellos vectores que resuelven $Av = \lambda v$, $v = (a, b)^T$.
4. Computamos el equilibrio x^*.
5. Finalmente, obtener E^s y E^u de acuerdo a las siguientes definiciones.

Veamos primero el caso homogéneo.

Sistemas lineales

Para el caso homogéneo y dos raíces.

Definición

El sub-espacio estable corresponde al conjunto

$$E^s = \{w \in \mathbb{R}^2 : \;\; w = \alpha v\}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y v el vector propio cuyo valor propio asociado es negativo (en el caso de dos raíces reales diferentes).

Sistemas lineales

Definición

El sub-espacio inestable corresponde al conjunto

$$E^u = \{w \in \mathbb{R}^2 : \; w = \alpha v\}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y v el vector propio cuyo valor propio asociado es positivo (en el caso de dos raíces reales diferentes).

Sistemas lineales

$$p(t) = \begin{vmatrix} t+1 & -3 \\ -5 & t+3 \end{vmatrix} = (t+3)(t+1) - 15 = (t-2)(t+6).$$

Así, $\lambda_1 = -6$ y $\lambda_2 = 2$.

Sistemas lineales

Luego, resolviendo

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = -6 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

se obtiene

$$v_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Sistemas lineales

Análogamente, se llega a

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De este modo,

$$E^s = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ w \in \mathbb{R}^2 : \; w = \alpha \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

y

$$E^u = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ w \in \mathbb{R}^2 : \; w = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Diagrama de fases

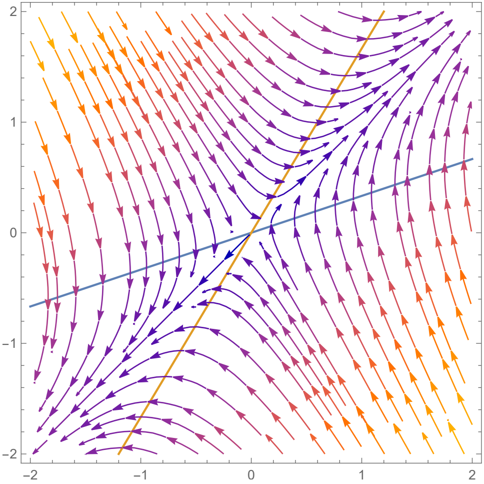

Figura Diagrama de fases.

Sistemas lineales

Sin embargo, el modelo es no homogéneo $x' = Ax + b$. El equilibrio es

$$x^* = -A^{-1}b = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -1/12 \end{pmatrix}.$$

En este caso, E^s y E^u son una transformación afín. O sea, se desplaza.

Sistemas lineales

$$E^s = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}\right\} + x^* = \left\{w \in \mathbb{R}^2 : \; w = \alpha \begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix} + x^*, \; \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

y

$$E^u = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\} + x^* = \left\{w \in \mathbb{R}^2 : \; w = \alpha \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + x^*, \; \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

Diagrama de fases

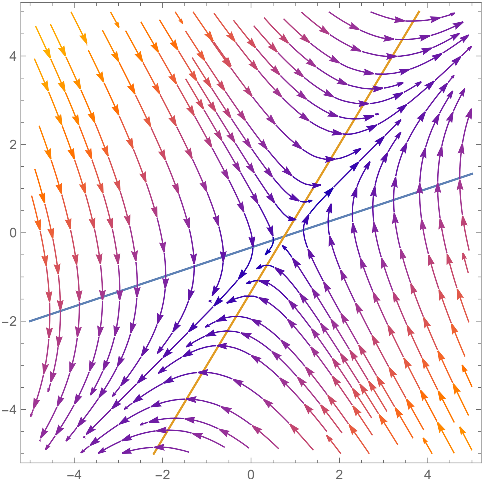

Figura Diagrama de fases.

Sistemas no lineales

Consideremos el siguiente sistema no lineal bi-dimensional

$$\begin{cases} x' & = x - 1 \\ y' & xe^{x} - y. \end{cases}$$

1. Encontrar los equilibrios.
2. Determinar el Sistema Lineal Asociado.
3. Caracterizar los equilibrios.
4. Efectuar el diagrama de fases basado en los resultados anteriores.

Sistemas no lineales

El equilibrio es $(1, e)$. Luego, computamos

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (x+1)e^x & -1 \end{bmatrix}.$$

Evaluando en P^*,

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2e & -1 \end{bmatrix}.$$

Sistemas no lineales

Como $p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$, $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 1$. Esto implica que el equilibrio es hiperbólico (parte real no nula) y, se comporta localmente como una silla (por H.G.). Finalmente, los vectores propios del SLA son $v_1 = (0, 1)^T$ (asociado a $\lambda_1 = -1$ y $v_2 = (1/e, 1)^T$ (asociado a $\lambda_2 = 1$). De este modo,

$$E^s = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \left\{w \in \mathbb{R}^2 : \; w = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

y

$$E^u = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1/e \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \left\{w \in \mathbb{R}^2 : \; w = \alpha \begin{bmatrix} 1/e \\ 1 \end{bmatrix}, \; \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

Diagrama de fases

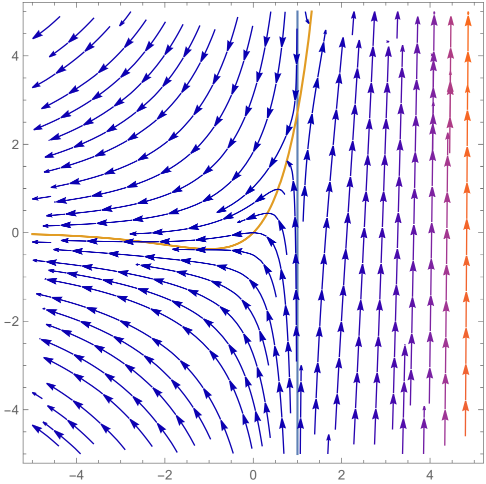

Figura Diagrama de fases.

Aplicación: presa-depredador

In regard with the system

$$x_1' = ax_1\left(1 - \frac{x_2}{K}\right) - bx_1x_2$$
$$x_2' = cx_1x_2 - dx_2.$$

First, we compute the equilibriums. Certainly, $P_1^* = (0,0)$ is an equilibrium of the system. Then,

$$0 = ax_1\left(1 - \frac{x_2}{K}\right) - bx_1x_2$$
$$0 = cx_1x_2 - dx_2$$

yields for $x_1, x_2 \neq 0$[1],

$$a\left(1 - \frac{x_2}{K}\right) = bx_2.$$

[1] Since $x_1 = 0$ implies $x_2 = 0$

Aplicación: presa-depredador

Hence, $x_2^* = \frac{aK}{bK+a}$ and $x_1^* = \frac{d}{c}$. Then, we compute the jacobian matrix

$$J = \begin{bmatrix} a - bx_2 - \frac{a}{K}x_2 & -\frac{a}{K}x_1 - bx_1 \\ cx_2 & cx_1 - d \end{bmatrix}$$

Evaluating at $(0,0)$

$$J = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}.$$

Aplicación: presa-depredador

The eigenvalues are $\lambda_1 = a$ and $\lambda_2 = -d$. Since both parameters are positive, the origin is a saddle equilibrium. Now, with respect to the second equilibrium.

$$J = \begin{bmatrix} a - b\frac{aK}{bK+a} - \frac{a}{K}\frac{aK}{bK+a} & -\frac{a}{K}\frac{d}{c} - b\frac{d}{c} \\ c\frac{aK}{bK+a} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{K}\frac{d}{c} - b\frac{d}{c} \\ c\frac{aK}{bK+a} & 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicación: presa-depredador

Since the characteristic polynomial would be

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \left(-\frac{ad}{K} - bd\right)\frac{aK}{bK + a} = \lambda^2 + \left(\frac{ad}{K} + bd\right)\frac{aK}{bK + a}$$

and each parameter is positive, we would have two complex values for the eigenvalues, with zero real part[2]. Therefore, it is not possible to apply H-G Theorem, but we know that it will behave as a center.

[2] $x^2 + a = 0$ implies $x = \pm i\sqrt{|a|}$ for $a > 0$

Diagrama de fases

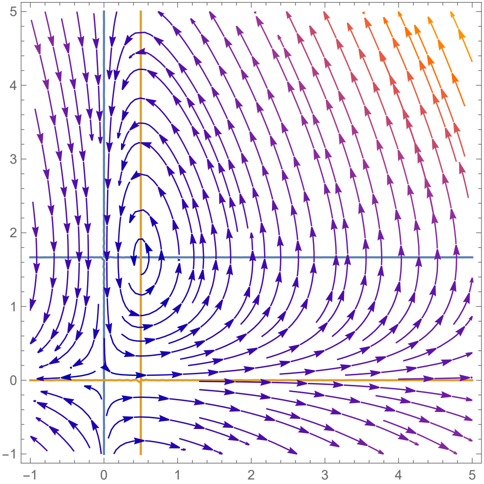

Figura Diagrama de fases.

Diagrama de fases - zoom

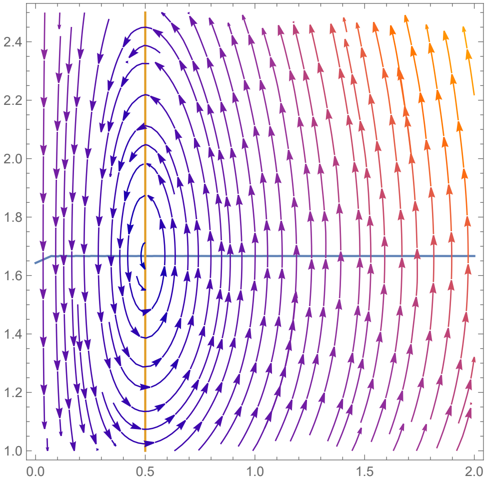

Figura Diagrama de fases.

Aplicación: capital-polución

El siguiente es un modelo de crecimiento y polución. Considere K el stock de capital y P la polución (nivel de polución). Tenemos (en analogía con el modelo de Solow), la siguiente dinámica para el capital.

$$K' = sK^{\alpha} - \delta K.$$

Por otro lado, la polución será creciente con el stock de capital (mayor producción implica mayor polución) y decae naturalmente a un ratio γ. O sea,

$$P' = K^{\beta} - \gamma P.$$

En este modelo, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$ y $\gamma > 0$. Considere $P(0), K(0) \geq 0$.

Aplicación: caso no lineal

10.1) Demuestre que $K^* = \left(\frac{\delta}{s}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$, o $K^* = 0$.
10.2) Encuentre P^*.
10.3) Efectué el diagrama de fases analizando los equilibrios. Note que

$$J = \begin{bmatrix} \alpha s K^{\alpha-1} - \delta & 0 \\ \beta K^{\beta-1} & -\gamma \end{bmatrix}.$$

Aplicación: caso no lineal

1. Igualar K' a cero.
2. $P^* = \pm\frac{K^\beta}{\gamma} = \pm\left(\frac{\delta}{s}\right)^{\frac{\beta}{\alpha-1}}$ o, $P^* = 0$.
3. Localmente, $(0,0)$ se comporta como una silla, y los otros dos, como atractores.
4. Note que desde un punto de vista económica, solo 2 de los equilibrios importan ¿cuáles?

Diagrama de fases

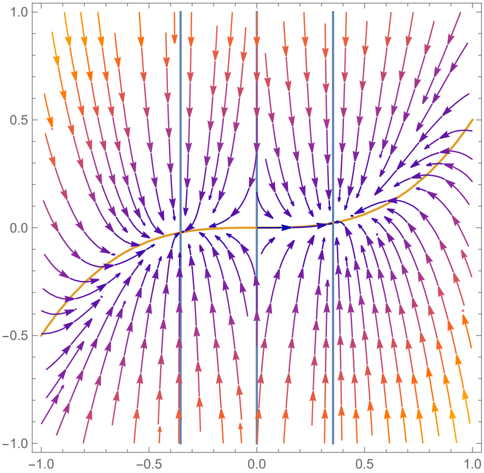

Figura Diagrama de fases.

Análisis sobre los parámetros

$$\begin{cases} K' &= 0.5K^{0.5} - 0.5K \\ P' &= K^2 - P. \end{cases}$$

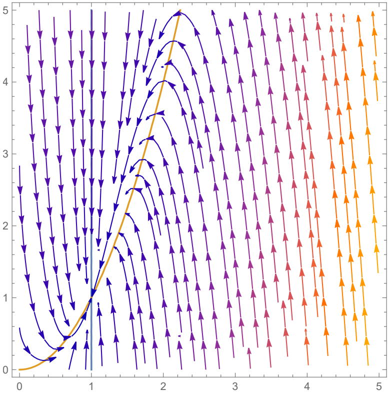

Figura Diagrama de fases.

Análisis sobre los parámetros

$$\begin{cases} K' &= 0.8K^{0.5} - 0.5K \\ P' &= K^2 - P. \end{cases}$$

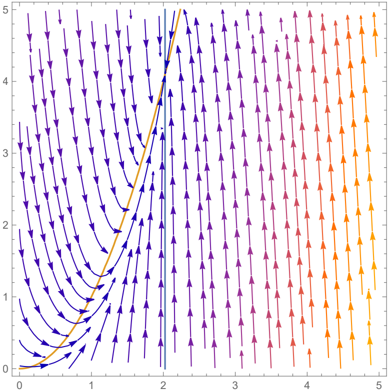

Figura Diagrama de fases.

Análisis sobre los parámetros

$$\begin{cases} K' &= 0.8K^{0.5} - 0.5K \\ P' &= K^{3/2} - P. \end{cases}$$

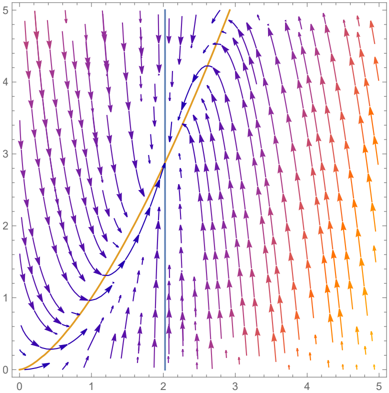

Figura Diagrama de fases.

Material adicional

Curva Logística

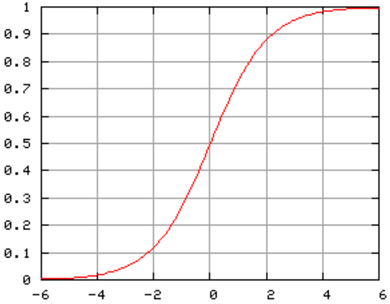

Figura Curva logística.

Modelo Logístico

$$x' = x(a - bx), \;\; a, b > 0. \tag{1}$$

Separación de variables:

$$\int \frac{dx}{ax - bx^2} = \int dt$$

$$\ln|x| - \ln|(a - bx)| = \ln\left|\frac{x}{a - bx}\right| = at + C.$$

Modelo Logístico

De ahí,

$$x(t) = aAe^{at} - bAe^{at}x(t)$$

$$x(t)(1 + bAe^{at}) = aAe^{at}$$

$$x(t) = \frac{aAe^{at}}{1 + bAe^{at}}, \;\; A > 0.$$

Diferentes parámetros

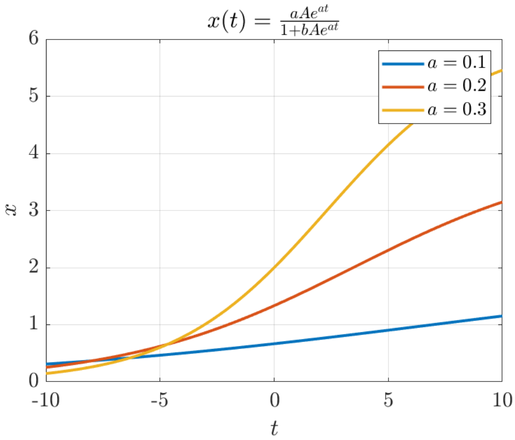

Figura $x(t)$ para diferentes a.

Condición inicial y equilibrios

¿Cuáles son los equilibrios?

$$A = \frac{x_0}{a - x_0 b}.$$

O sea,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a\left(\frac{x_0}{a-x_0 b}\right)e^{at}}{1 + b\left(\frac{x_0}{a-x_0 b}\right)e^{at}} \\ &= \frac{a/b}{1 + \left(\frac{a}{bx_0} - 1\right)e^{-at}}. \end{aligned}$$

Ejercicio 2

$$\max \ \Pi = p(y)y - c \cdot y.$$

CPO:

$$p'(y)y + p(y) - c = 0.$$

Ejercicio 2

Derivando respecto a c tendríamos por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dc}[p'(y)y + p(y) - c] &= 0 \\
p''(y)\frac{dy}{dc}y + p'(y)\frac{dy}{dc} + p'(y)\frac{dy}{dc} - 1 &= 0 \\
p''(y)y\frac{dy}{dc} + 2p'(y)\frac{dy}{dc} &= 1 \\
\frac{dy}{dc}[p''(y)y + 2p'(y)] &= 1.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\frac{dp}{dc} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dc}$, se obtiene lo solicitado

$$\frac{dp}{dc} = \frac{p'(y)}{p''(y)y + 2p'(y)} = \frac{1}{\frac{p''(y)y}{p'(y)} + 2}. \tag{2}$$

Ejercicio 2

De la Ecuación (2), igualando a 1, se obtiene

$$\frac{1}{\frac{p''(y)y}{p'(y)} + 2} = 1$$
$$p'(y) = p''(y) + 2p'(y).$$

Haciendo el cambio de variable $x(t) = p'(y)$, se obtiene la EDO lineal de orden 1: $x'(t) = -\frac{1}{t}x(t)$. Por separación de variables,

$$p(y) = \int \frac{A}{y} dy = A \ln y + B.$$

Ejercicio 3

$$\frac{L'}{L} = \theta - \beta\left(\frac{L}{Y}\right),\ \theta, \beta > 0$$

$Y = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$ con $\alpha \in (0,1)$. Reemplazando,

$$\begin{aligned} L' &= \theta L - \beta\left(\frac{L^2}{Y}\right) \\ &= \theta L - \beta\left(\frac{L^2}{K^{\alpha}L^{1-\alpha}}\right) \\ &= \theta L - \beta\left(\frac{L^{1+\alpha}}{K^{\alpha}}\right). \end{aligned}$$

Finalmente, haciendo $L' = 0$,

$$L^* = \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{1/\alpha} K.$$

Ejercicio 4

Curva de Gompertz (usado para modelar la mortalidad humana).

$$x' = 2x \ln \frac{K}{x}.$$

Los equilibrios son $x^* = 0$ y $x^* = K$. Luego,

$$\frac{dF}{dx} = 2\left(\ln \frac{K}{x} - 1\right).$$

Evaluando, se tiene $F'(K) = -2 < 0$ mientras que $x \to 0$, $F' \to \infty$ (no se puede reemplazar directamente pues se estaría dividiendo por cero).

Gompertz

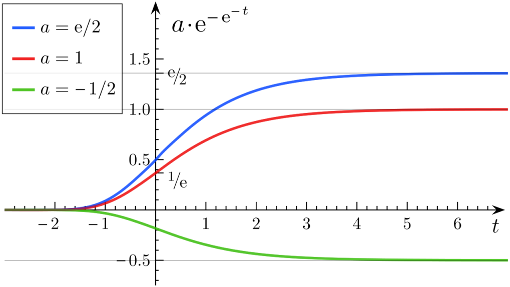

Figura Curva de Gompertz.

Gracias