Ejercicios adicionales: sistemas dinámicos reales escalares
Matemática para Economistas IV

Marcelo Gallardo

Octubre 2022

Pontificia Universidad Católica del Perú

`marcelo.gallardo@pucp.edu.pe`

1. Considere la siguiente ecuación diferencial

$$x' = x(a - bx), \ \ a, b > 0. \tag{1}$$

1.1) Indique qué tipo de situación modela la ecuación (1).
1.2) Si $x(0) = y_0$, obtenga la solución y analice el comportamiento de esta última en función de si $x_0 > a/b$ o si $x_0 < a/b$.

1.1) Se trata del modelo de crecimiento poblacional logístico (Verhulst).

1.2) Procedemos vía separación de variables:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{ax - bx} &= dt \\
\int \frac{dx}{ax - bx^2} &= \int dt \\
\frac{\ln x - \ln(a - bx)}{a} &= t + C \\
\ln\left|\frac{x}{a - bx}\right| &= at + C \\
\frac{x}{a - bx} &= e^C e^{at} = Ae^{at}.
\end{aligned}$$

De ahí,

$$\begin{aligned}
x(t) &= aAe^{at} - bAe^{at}x(t) \\
x(t)(1 + bAe^{at}) &= aAe^{at} \\
x(t) &= \frac{aAe^{at}}{1 + bAe^{at}}, \ \ A > 0.
\end{aligned}$$

Si $x(0) = x_0$,

$$x(0) = \frac{aA}{1 + bA} = x_0.$$

Despejando A,

$$A = \frac{x_0}{a - x_0 b}.$$

Observación. *Note que $x_0 \neq a/b$ pues este último es justamente un equilibrio (junto al 0).*

De este modo,

$$x(t) = \frac{a/b}{1 + \left(\frac{a}{bx_0} - 1\right) e^{-at}}.$$

Si $x_0 < a/b$, $x(t) \to a/b$ creciente. Si $x_0 > a/b$, $x(t) \to a/b$ decreciente. Esto no es coincidencia pues $x^* = a/b$ es un equilibrio asintóticamente estable. En efecto,

$$F(x) = x(a - bx) = ax - bx^2$$

$$F'(x) = a - 2bx.$$

Luego,

$$F'(a/b) = -a < 0.$$

2. Considere el problema del monopolista con costos marginales constantes ($c(y) = c \cdot y$)

$$\text{máx } \Pi = p(y)y - c \cdot y.$$

2.1) Demuestre que

$$\frac{dp}{dc} = \frac{1}{\frac{p''(y)y}{p'(y)} + 2}.$$

2.2) Si $dp/dc = 1$, ¿cuál es la función de demanda inversa $p = p(y)$?

2.1) Partiendo de

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[p(y)y - c(y)\right] = p'(y)y + p(y) - c'(y) = 0.$$

Luego, asumiendo que $c(y) = c \cdot y$ derivando respecto a c tendríamos por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dc}[p'(y)y + p(y) - c] = 0$$

$$p''(y)\frac{dy}{dc}y + p'(y)\frac{dy}{dc} + p'(y)\frac{dy}{dc} - 1 = 0$$

$$p''(y)y\frac{dy}{dc} + 2p'(y)\frac{dy}{dc} = 1$$

$$\frac{dy}{dc}[p''(y)y + 2p'(y)] = 1$$
$$\frac{dy}{dc} = \frac{1}{p''(y)y + 2p'(y)}.$$

Ahora, teniendo en cuenta que

$$\frac{dp}{dc} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dc},$$

multiplicando por $p'(y)$ se tiene

$$\frac{dp}{dc} = \frac{p'(y)}{p''(y)y + 2p'(y)} = \frac{1}{\frac{p''(y)y}{p'(y)} + 2}. \qquad (2)$$

2.2) De la Ecuación (2), igualando a 1, se obtiene

$$\frac{1}{\frac{p''(y)y}{p'(y)} + 2} = 1$$
$$p'(y) = p''(y) + 2p'(y).$$

Haciendo el cambio de variable $x(t) = p'(y)$, se obtiene la EDO lineal de orden 1: $x'(t) = -\frac{1}{t}x(t)$. Aplicando el método de separación de variables,

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dt}{t}$$
$$\int \frac{dx}{x} = \int -\frac{dt}{t}$$
$$\ln|x| = -\ln|t| + C$$
$$x(t) = e^C e^{-\ln t} = \frac{A}{t}.$$

Así,

$$p'(y) = \frac{A}{y}.$$

Integrando respecto a y, se obtiene

$$p(y) = \int \frac{A}{y} dy = A\ln y + B.$$

3. A continuación, presentamos el modelo de empleo de Haavelmo. Sea K el nivel de stock de capital en una industria y L el nivel de empleo. Supongamos que se tiene una función de producción del tipo Cobb-Douglas $Y = K^\alpha L^{1-\alpha}$, con $\alpha \in (0,1)$. Se supone, además, que el crecimiento en el cambio en la tasa de empleo está dado por

$$\frac{L'}{L} = \theta - \beta\left(\frac{L}{Y}\right), \ \theta, \beta > 0.$$

Esto es, el cambio en la tasa de empleo crece cuando la producción per-capita crece. El nivel de capital se supone constante.
3.1) Demostrar que

$$L' = \theta L - \beta\left(\frac{L^{1+\alpha}}{K^{\alpha}}\right).$$

3.2) Encuentre L^* equilibrio en función de los parámetros y del nivel del stock de capital.

3.1) Reemplazando con la expresión de Y y multiplicando ambos lados por L, Reemplazando,

$$\begin{aligned}
L' &= \theta L - \beta\left(\frac{L^2}{Y}\right)\\
&= \theta L - \beta\left(\frac{L^2}{K^{\alpha}L^{1-\alpha}}\right)\\
&= \theta L - \beta\left(\frac{L^{1+\alpha}}{K^{\alpha}}\right).
\end{aligned}$$

3.2) El equilibrio se obtiene haciendo $L' = F(L) = 0$. En este caso,

$$0 = \theta L - \beta\left(\frac{L^{1+\alpha}}{K^{\alpha}}\right).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\theta L &= \beta\left(\frac{L^{1+\alpha}}{K^{\alpha}}\right).\\
\frac{L}{L^{1+\alpha}} &= \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{1}{K^{\alpha}}\right).\\
L^{-\alpha} &= \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{1}{K^{\alpha}}\right).\\
L^{\alpha} &= \frac{\theta K^{\alpha}}{\beta}\\
L^* &= \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{1/\alpha} K.
\end{aligned}$$

4. Realizar el diagrama de fase para la ecuación de Gompertz

$$x' = 2x\ln\frac{K}{x}.$$

El procedimiento es el mismo siempre para las ecuaciones del tipo

$$x' = F(x;\boldsymbol{\theta}),\ x \in \mathbb{R}$$

siendo $\boldsymbol{\theta}$ un vector de parámetros. Primero, resolver $F(x;\boldsymbol{\theta})=0$. Luego, computar $F'(x^*)$ y discernir entre $F'(x^*)<0$ o $F'(x^*)>0$ (existen condiciones adicionales y/o se procede ad-hoc para el caso $F'(x^*)=0$). En este caso, los equilibrios son $x^*=0$ y $x^*=K$. Luego,

$$F'(x)=2\left(\ln\frac{K}{x}-1\right).$$

Evaluando, se tiene $F'(K)=-2<0$ mientras que $x\to 0$, $F'\to\infty$ (no se puede reemplazar directamente pues se estaría dividiendo por cero). En ese sentido, $x^*=K$ estable, mientras que $x^*=0$ es inestable.

5. Recuerde la ecuación fundamental del modelo de Solow.

$$k'(t)=sf(k(t))-(n+\delta)k(t)$$

5.1) Si $f(k(t))=\sqrt{k(t)}$, ¿puede obtenerse explícitamente la trayectoria del stock de capital per-capita? ¿Y si $f(k(t))=\ln(k(t))$?
5.2) Tome $f(k)=k^\gamma,\ \gamma>0$, obtenga el equilibrio k^*. ¿Qué valores puede tomar γ? Analice en función de γ estabilidad y convergencia.

Si $f(k(t))=\sqrt{k(t)}$, aplicando Bernouilli, se puede encontrar una solución analítica. En efecto, la ecuación de Bernouilli tiene la forma

$$x'(t)=a(t)x(t)+b(t)x^\alpha(t).$$

En el modelo

$$k'(t)=sk^{1/2}-(n+\delta)k(t)$$

1. $a(t)=-(n+\delta)$
2. $b(t)=s$
3. $\alpha=1/2$.

Luego, haciendo $y=\sqrt{x}$, se llega a la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$y'=-\left(\frac{n+\delta}{2}\right)y+\frac{1}{2}s.$$

Luego,

$$y(t)=Ce^{-\left(\frac{n+\delta}{2}\right)t}+\frac{s}{n+\delta}.$$

Finalmente, como $x(t)=y(t)^2$,

$$x(t)=\left[Ce^{-\left(\frac{n+\delta}{2}\right)t}+\frac{s}{n+\delta}\right]^2.$$

En conclusión,

1. Para $f(k) = \sqrt{k}$ se puede resolver vía Bernouilli.
2. Para $f(k) = \ln(k)$, no de forma directa.
3. $0 < \gamma < 1$ - para la concavidad y monotonía.
4. $k^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$.