PUCP

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES

MATEMÁTICAS PARA ECONOMISTAS

PRÁCTICA DIRIGIDA 5

PROFESOR: JORGE R. CHÁVEZ

JEFES DE PRÁCTICA: JOAQUÍN RIVADENERYA & MARCELO GALLARDO

SEMESTRE 2022-2

FECHA 25-10-2022

Problemas sugeridos para abordar durante la PD: 1, 2, 3, 4 (alguno de los incisos), 5, 7 y 8 (alguno de los incisos).

Ecuaciones diferenciales escalares no lineales.

1) Considere la siguiente ecuación diferencial

$$x' = x(a - bx), \; a, b > 0. \tag{1}$$

1.1) Indique qué tipo de situación modela la ecuación (1).

1.2) Si $y(0) = y_0$, obtenga la solución y analice el comportamiento de esta última en función de si $y_0 > a/b$ o si $y_0 < a/b$.

2) Considere el problema del monopolista con costos marginales constantes ($c(y) = c \cdot y$)

$$\text{máx } \Pi = p(y)y - c \cdot y.$$

2.1) Demuestre que

$$\frac{dp}{dc} = \frac{1}{\dfrac{p''(y)y}{p'(y)} + 2}.$$

2.2) Si $dp/dc = 1$, ¿cuál es la función de demanda inversa $p = p(y)$?

3) A continuación, presentamos el modelo de empleo de Haavelmo. Sea K el nivel de stock de capital en una industria y L el nivel de empleo. Supongamos que se tiene una función de producción del tipo Cobb-Douglas $Y = K^{1-\alpha}L^{\alpha}$, con $\alpha \in (0, 1)$. Se supone, además, que el crecimiento en el cambio en la tasa de empleo está dado por

$$\frac{L'}{L} = \theta - \beta \left(\frac{L}{Y}\right), \; \theta, \beta > 0.$$

Esto es, el cambio en la tasa de empleo crece cuando la producción per-capita crece. El nivel de capital se supone constante.

3.1) Demostrar que

$$L' = \theta L - \beta\left(\frac{L^{1+\alpha}}{K^{\alpha}}\right).$$

3.2) Encuentre L^* equilibrio en función de los parámetros y del nivel del stock de capital.

4) Realizar el diagrama de fase para cada una de las siguientes ecuaciones, identificar los puntos de equilibrio (en caso existan) y decir si son estables u inestables:

4.1) $x' = -4x^2 + 8x$.

4.2) $x' = 2x \ln \frac{K}{x}$ - *curva de Gompertz.*

4.3) $x' = (x-3)(x+4)$.

4.4) $x' = ae^x$, $a \in \mathbb{R}$.

4.5) $x' = \eta\sqrt{x} - \xi x$, $\eta, \xi > 0$.

5) (Modelo de Solow). Recuerde la ecuación fundamental del modelo de Solow.

$$k'(t) = sf(k(t)) - (n+\delta)k(t)$$

5.1) Si $f(k(t)) = \sqrt{k(t)}$, ¿puede obtenerse explícitamente la trayectoria del stock de capital per-capita? ¿Y si $f(k(t)) = \ln(k(t))$?

5.2) Tome $f(k) = k^{\gamma}$, $\gamma > 0$, obtenga el equilibrio k^*. ¿Qué valores puede tomar γ? Analice en función de γ estabilidad y convergencia.

Sistemas lineales: subespacios estable e inestable.

6) Considere el siguiente sistema lineal

$$x' = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x.$$

Encuentre el subespacio estable e inestable. Repita el análisis para el sistema

$$x' = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} x.$$

Ecuaciones diferenciales vectoriales no lineales.

7) Explique de manera intuitiva en qué consiste el Teorema de Hartman-Grobman así como su utilidad en el análisis de sistemas dinámicos reales no lineales. Luego, aplicando este teorema, analice la estabilidad de los equilibrios de los siguientes sistemas

6.1) $x' = x - 1,\ y' = xe^x - y.$

6.2) $x' = 2xy,\ y' = 1 - 3x^2 - y^2.$

6.3) $x' = 4x - 3xy,\ y' = 3y - xy.$

8) Efectué el diagrama de fases de los siguientes sistemas y obtenga, para el SLA (Sistema Lineal Asociado), los subespacios estable e inestable.

7.1) $x' = x - 1,\ y' = xe^x - y.$

7.2) $x' = 2xy,\ y' = 1 - 3x^2 - y^2.$

7.3) $x' = 4x - 3xy,\ y' = 3y - xy.$

Use el siguiente código en Wolfram Mathematica para verificar sus respuestas:

Show [ContourPlot[{x' = , y'=}, {x, a, b}, {y, c, d}], StreamPlot[{x', y'}, {x, a, b}, {y, c, d}]]

a y b son los valores mínimo y máximo que toma x en la representación gráfica, c y d son los valores mínimo y máximo que toma y en la representación gráfica. En $x' =$ se debe reemplazar por la expresión de $f(x, y)$ tal que $x' = f(x, y)$, y lo mismo para y'.

9) Considere el siguiente sistema no lineal

$$x_1' = ax_1\left(1 - \frac{x_2}{K}\right) - bx_1x_2$$
$$x_2' = cx_1x_2 - dx_2,\ d > cK.$$

9.1) Analice que tipo de situación puede ser modelada por este sistema.

9.2) Encuentre los equilibrios.

9.3) Analice la estabilidad de los equilibrios encontrados.

10) El siguiente es un modelo de crecimiento y polución. Considere K el stock de capital y P la polución (nivel de polución). Tenemos (en analogía con el modelo de Solow), la siguiente dinámica para el capital.

$$K' = sK^\alpha - \delta K.$$

Por otro lado, la polución será creciente con el stock de capital (mayor producción implica mayor polución) y decae naturalmente a un ratio γ. O sea,

$$P' = K^{\beta} - \gamma P.$$

En este modelo, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$ y $\gamma > 0$. Considere $P(0), K(0) \geq 0$.

10.1) Demuestre que $K^* = \left(\frac{\delta}{s}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$, o $K^* = 0$.

10.2) Encuentre P^*.

10.3) Efectué el diagrama de fases analizando los equilibrios. Note que

$$J = \begin{bmatrix} \alpha s K^{\alpha-1} - \delta & 0 \\ \beta K^{\beta-1} & -\gamma \end{bmatrix}.$$