Práctica Dirigida 4
Matemática para Economistas IV

Marcelo Gallardo B.

PUCP

Octubre 2022

Hoja de ruta

1. PD3: introducción a la optimización.
2. Método de Lagrange.
3. Aplicaciones.

Introducción a la optimización (revisited)

Ejercicio 19 (PD3)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

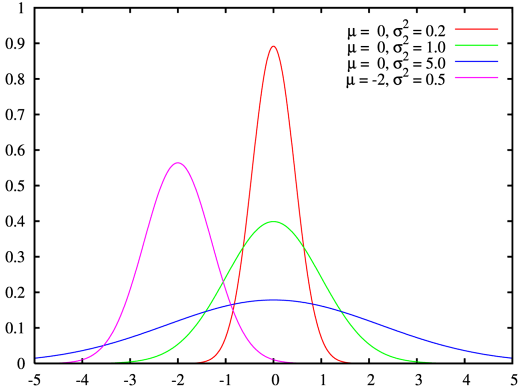

Figura Densidad normal.

Ejercicio 19 (PD3)

$$f'(x) = -\frac{(x-\mu)}{\sigma^2\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = -\frac{(x-\mu)f(x)}{\sigma^2}.$$

Evaluando en $x^* = \mu$, se obtiene $f'(\mu) = 0$. Luego

$$f''(x) = -\frac{f(x)}{\sigma^2} - \frac{(x-\mu)^2 f(x)}{\sigma^4}.$$

Evaluando nuevamente en $x^* = \mu$,

$$f''(\mu) = -\frac{f(\mu)}{\sigma^2} < 0,$$

pues $f(x) > 0$ para todo x. Concluimos entonces que f alcanza un máximo local (**¿es global?**) cuando x es igual a la media μ.

Problema del consumidor

$$\max \; U(x)$$
$$px \leq I$$
$$x \in \mathbb{R}^n_+.$$

¿Qué condiciones impondría sobre la función de utilidad para que la solución es única? ¿En qué casos podría tenerse más de una solución? ¿Infinitas?

Problema del consumidor

1. Teorema de Weierstrass: dominio compacto función continua.
2. U (estrictamente) cuasicóncava $\Leftrightarrow$ preferencias $\succeq$ estrictamente convexas.
3. U lineal de forma que $U(x, y) = ax + by$ y $U_{mgx}/U_{mgy} = a/b = p_x/p_y$.

Más de una solución

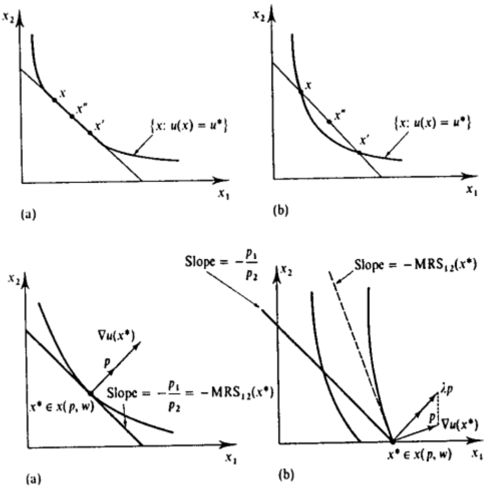

Figura Más de una solución en el $\mathcal{P}_C$.

La técnica de Lagrange

Joseph-Louis Lagrange

Figura Joseph-Louis Lagrange.

Joseph-Louis Lagrange

1. Estudió en Turin (Torino)- Italia.
2. Profesor en l'École Normale Supérieure de Paris (ENS).
3. Alumnos notables: Denis Poisson (l'X), Jean-Baptiste Fourier (l'X).

Multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned} &\text{opt } f(x_1, x_2) \\ &s.a. \ : \ g(x_1, x_2) = g_0. \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) - \lambda(g(x_1, x_2) - g_0)$$

o, alternativamente

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda(g_0 - g(x_1, x_2))$$

Multiplicadores de Lagrange

De manera más general,

$$\begin{aligned} \text{opt } & f(x_1, x_2, ..., x_n) \\ s.a. : & \, g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = b_1 \\ & \, g_2(x_1, x_2, ..., x_n) = b_2 \\ \vdots & \\ & \, g_m(x_1, ..., x_n) = b_m. \end{aligned}$$

En este caso,

$$\mathcal{L}(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (b_j - g_j(x_1, ..., x_n)).$$

Condiciones de primer orden

$$\nabla_x \mathcal{L} = \nabla f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla (b_j - g_j(x_1, ..., x_n)).$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} b_j - g_j(x_1, ..., x_n) = 0, \ \forall \ j = 1, ..., m.$$

Alternativamente,

$$\nabla f(x_1, ..., x_n) = \lambda \cdot \nabla g(x_1, ..., x_n).$$

Ejercicio 3 (PD4)

Resuelva los siguientes problemas de optimización con restricciones y determine previamente si se puede asegurar la existencia de una solución al problema $\mathcal{P}_L$:

$$\mathcal{P}_L : \begin{cases} \min & f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\ \text{s.a.:} & x_1^2 + x_2^2 = 4 \end{cases}$$

$$\mathcal{P}_L : \begin{cases} \text{opt} & f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

Ejercicio 3 (PD4)

1. Las dos funciones objetivo son continuas.
2. Sin embargo, solo en el primer caso el dominio es compacto. ¿Porqué?
3. Teorema de Weierstrass.
4. Aplicamos Lagrange para obtener un candidato a solución (condición necesaria más no suficientes, sin embargo, argumentos de convexidad o concavidad proveen suficiencia).

Ejercicio 3 (PD4)

$$\mathcal{L} = x_1 + x_2 + \lambda(4 - x_1^2 - x_2^2).$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} &= 1 - 2\lambda x_1 = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} &= 1 - 2\lambda x_2 = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= 4 - x_1^2 - x_2^2 = 0.
\end{aligned}$$

Ejercicio 3 (PD4)

Si $x_2 \neq 0$ (¿porqué?)

$$\frac{1}{1} = \frac{2\lambda x_1}{2\lambda x_2} \implies x_1 = x_2$$

Luego,

$$\begin{aligned} 2x_1^2 &= 4 \\ x_1^2 &= 2 \\ x_1 &= \pm\sqrt{2} = x_2. \end{aligned}$$

Ejercicio 3 (PD4)

Mínimo.

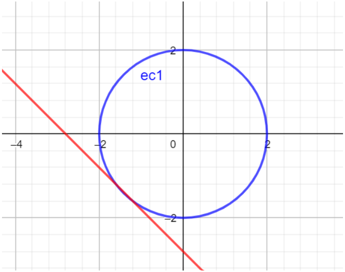

Figura Pregunta 3A.

Ejercicio 3 (PD4)

Máximo.

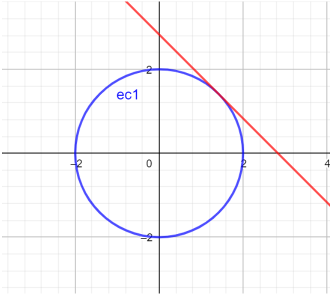

Figura Pregunta 3A.

Aplicaciones

Ejercicio 5 (PD4)

Resuelva el siguiente problema del consumidor

$$\mathcal{P}_C : \begin{cases} \max & x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \\ \text{s.a.:} & p_1 x_1 + p_2 x_2 = I. \end{cases}$$

¿Cuál es la especificación de la función de utilidad? Obtenga la función de utilidad indirecta.

Ejercicio 5 (PD4)

Primero, se plantea la función Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta} + \lambda(I - p_1 x_1 - p_2 x_2).$$

Luego, la CPO proveen

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} - \lambda p_1 = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1} - \lambda p_2 = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}(x_1, x_2)}{\partial \lambda} = I - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0.$$

Ejercicio 5 (PD4)

Ciertamente $x_1, x_2 \neq 0$ (nuevamente, ¿porqué?)

$$\frac{\alpha x_2}{\beta x_1} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Así, $x_2 = \frac{\beta p_1}{\alpha p_2} x_1$. Reemplazando en la restricción,

$$p_1 x_1 + p_2 \left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2} x_1 \right) = p_1 x_1 + \frac{\beta p_1}{\alpha} x_1 = I. \tag{1}$$

De (1),

$$x_1^* = \frac{\alpha I}{(\alpha + \beta) p_1}, \; x_2^* = \frac{\beta I}{(\alpha + \beta) p_2}.$$

Ejercicio 5 (PD4)

Finalmente,

$$\begin{aligned} V(p_1, p_2, I) &= (x_1^*)^\alpha (x_2^*)^\beta \\ &= \left(\frac{\alpha I}{(\alpha+\beta)p_1}\right)^\alpha \left(\frac{\beta I}{(\alpha+\beta)p_2}\right)^\beta \\ &= \alpha^\alpha \beta^\beta p_1^{-\alpha} p_2^{-\beta} (\alpha+\beta)^{-\alpha-\beta} I^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Si $\alpha + \beta = 1$,

$$V(p_1, p_2, I) = \alpha^\alpha \beta^\beta p_1^{-\alpha} p_2^{-\beta} I.$$

Ejercicio 6 (PD4)

El problema de minimización del coste consiste en resolver

$$\begin{cases} \min & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \\ \text{s.a.:} & f(x_1, ..., x_n) = y, \end{cases}$$

dada una tecnología representada por la función de producción $f(x_1, ..., x_n)$, y un nivel de producción deseado y. Aquí w_i es el precio del factor de producción x_i.

Ejercicio 6 (PD4)

Resuelva el problema de minimización del coste para las siguientes funciones de producción (analice en función de los parámetros)

$$f(x_1, x_2) = Ax_1^a x_2^b$$
$$f(x_1, x_2) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$$
$$f(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$$
$$f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2.$$

Asimismo, indique qué tipo de tecnología representan y relaciónelo con las especificaciones usadas en las funciones de utilidad. Finalmente, obtenga la función de costes

$$c(\boldsymbol{w}, y) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^C(\boldsymbol{w}, y).$$

Ejercicio 6 (PD4)

1. Cobb-Douglas: se requieren los 2 factores, rendimientos a escala dependen de $\alpha + \beta$.
2. CES: puede usar un factor, ρ es un parámetro importante (¿qué pasa si $\rho \to 0$, $\rho \to 1$ o $\rho \to -\infty$?)
3. Leontief: bienes complementarios.
4. Lineal: sustitutos perfectos.

Ejercicio 6 (PD4)

Tecnología de producción Cobb-Douglas:

$$\min_{x_1, x_2} \; w_1 x_1 + w_2 x_2$$
$$s.a. : Ax_1^a x_2^b = y.$$

Las condiciones de primer orden de la función Lagrangiana proveen

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{ax_1^{a-1}x_2^b}{bx_1^a x_2^{b-1}} = \frac{ax_2}{bx_1}.$$

Luego, $x_2 = \frac{bw_1}{aw_2}x_1$. Así,

$$y = Ax_1^a \left(\frac{bw_1}{aw_2} x_1 \right)^b.$$

Ejercicio 6 (PD4)

Despejando x_1,

$$x_1(w_1, w_2, y) = \left(\frac{ya^b w_2^b}{Ab^b w_1^b}\right)^{\frac{1}{a+b}} = A^{-\frac{1}{a+b}} \left[\frac{aw_2}{bw_1}\right]^{\frac{b}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}.$$

Multiplicando por $\frac{bw_1}{aw_2}$,

$$x_2(w_1, w_2, y) = A^{-\frac{1}{a+b}} \left[\frac{bw_1}{aw_2}\right]^{\frac{a}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}.$$

Ejercicio 6 (PD4)

Estas son entonces la demandas condicionadas de los factores de producción x_1 y x_2 respectivamente. Luego, podemos obtener la función de costes asociada:

$$
\begin{aligned}
c(w_1, w_2, y) &= w_1 x_1(w_1, w_2, y) + w_2 x_2(w_1, w_2, y) \\
&= A^{-\frac{1}{a+b}} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{a+b}} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{a}{a+b}} \right] w_1^{\frac{a}{a+b}} w_2^{\frac{b}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}.
\end{aligned}
$$

En el caso particular $a + b = 1$,

$$
c(w_1, w_2, y) = a^{-a}(1-a)^{a-1} w_1^a w_2^{1-a} y. \tag{2}
$$

Ejercicio 6 (PD4)

Sea $f(x_1, x_2) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$. El problema de minimización es el siguiente

$$\min_{x_1, x_2} \; w_1 x_1 + w_2 x_2$$
$$s.a. : x_1^\rho + x_2^\rho = y^\rho.$$

Las condiciones de primer orden proveen

$$\begin{aligned} w_1 - \lambda \rho x_1^{\rho-1} &= 0 \\ w_2 - \lambda \rho x_2^{\rho-1} &= 0 \\ x_1^\rho + x_2^\rho &= y^\rho. \end{aligned}$$

Despejando, obtenemos

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{x_1^{\rho-1}}{x_2^{\rho-1}} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\rho-1}.$$

Ejercicio 6 (PD4)

Así,

$$x_1 = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} x_2.$$

Reemplazando en la restricción

$$x_2^{\rho}\left[\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + 1\right] = y^{\rho}$$

Así,

$$x_2 = w_2^{\frac{1}{\rho-1}}\left[w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right]^{-1/\rho} y.$$

Multiplicando por $\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}$, obtenemos x_1

$$x_1 = w_1^{\frac{1}{\rho-1}}\left[w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right]^{-1/\rho} y.$$

Ejercicio 6 (PD4)

Luego, reemplazando en $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}$, obtenemos la función de costes

$$c(w_1, w_2, y) = w_1^{\frac{1}{\rho-1}+1}\left[w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right]^{-1/\rho} y + w_2^{\frac{1}{\rho-1}+1}\left[w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right]^{-1}$$

Factorizando por $\left[w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right] y$,

$$c(w_1, w_2, y) = \left[w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right]^{\frac{\rho-1}{\rho}} y.$$

Ejercicio 6 (PD4)

Observación

El caso de la función CES puede generalizarse de la siguiente forma

$$f(x_1, x_2) = [(a_1 x_1)^{\rho} + (a_2 x_2)^{\rho}]^{1/\rho}.$$

En dicho caso,

$$c(w_1, w_2, y) = [(w_1/a_1)^r + (w_2/a_2)^r]^{1/r} y, \; r = \frac{\rho}{\rho - 1}.$$

Ejercicio 6 (PD4)

Leontief. En este caso,

$$f(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}.$$

No podremos aplicar Lagrange ¿porqué? Sin embargo, dado que la empresa no despilfarrará, ningún factor que tenga un precio positivo, ésta debe encontrarse en un punto en el que

$$y = ax_1 = bx_2.$$

Por lo tanto $(x_1, x_2) = (y/a, y/b)$. O sea,

$$c(w_1, w_2, y) = \frac{w_1 y}{a} + \frac{w_2 y}{b} = y\left(\frac{w_1}{a} + \frac{w_2}{b}\right).$$

Ejercicio 6 (PD4)

Lineal. Cuando $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$, los factores 1 y 2 son sustitutos perfectos. Es posible producir con x_1 o bien con x_2. De este modo, la empresa utilizará el más barato que le permita obtener y. Es decir, si $w_1/a < w_2/b$, usará x_1, y si $w_2/b < w_1/a$, usará x_2. Por ende,

$$c(w_1, w_2, y) = \min\left\{\frac{w_1}{a}, \frac{w_2}{b}\right\} y.$$

Ejercicio 6 (PD4)

1. ¿Ven alguna simetría?
2. ¿Qué interpretaciones pueden darle a las funciones de producción?
3. Ejercicio 7: aplicación numérica

$$\begin{aligned} \min \quad & C(K, L) = 2K + 2L \\ \text{s.a.:} \quad & F(K, L) = K^{0.5} L^{0.5} = q, \end{aligned}$$

¿Qué tipo de función de producción? Identifiquen los parámetros y resuelvan.

Ejercicio 8 (PD4)

Se invierte x en dos activos. La varianza del retorno es

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\sigma_{12} x_1 x_2,$$

con σ_1^2 la varianza del activo 1, σ_2^2 la varianza del activo 2 y σ_{12} la covarianza entre los 2 activos. Asimismo, x_1 es la fracción invertida en el activo 1 y x_2 en el activo 2. Plantee el problema de optimización del inversionista (minimizar la varianza) teniendo en cuenta que $x = 1$.

Ejercicio 8 (PD4)

El problema que hay que resolver es el siguiente

$$\begin{aligned} \min\ \sigma^2 &= \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\sigma_{12} x_1 x_2 \\ s.a.: x_1 + x_2 &= x = 1. \end{aligned}$$

Luego,

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\sigma_{12} x_1 x_2 + \lambda(1 - x_1 - x_2).$$

Ejercicio 8 (PD4)

Condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 2\sigma_1^2 x_1 + 2\sigma_{12} x_2 - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 2\sigma_2^2 x_2 + 2\sigma_{12} x_1 - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 1 - x_1 - x_2 = 0.$$

Así,

$$2\sigma_1^2 x_1 + 2\sigma_{12} x_2 = 2\sigma_2^2 x_2 + 2\sigma_{12} x_1$$
$$\sigma_1^2 x_1 + \sigma_{12} x_2 = \sigma_2^2 x_2 + \sigma_{12} x_1.$$

Ejercicio 8 (PD4)

Luego,

$$(\sigma_1^2 - \sigma_{12})x_1 = (\sigma_2^2 - \sigma_{12})x_2.$$

Despejando

$$x_2 = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{12}}{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}x_1.$$

Finalmente,

$$1 = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{12}}{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}x_1 + x_1 = \left(\frac{\sigma_1^2 - \sigma_{12}}{\sigma_2^2 - \sigma_{12}} + 1\right)x_1$$

Ejercicio 8 (PD4)

Con esto,

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \\
x_2^* &= \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}.
\end{aligned}
$$

Interprete.

Profundización

Preferencias Stone Geary

Demuestre que la solución al siguiente problema de maximización de la utilidad

$$\mathcal{P}_C : \begin{cases} \max & U(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - A_i)^{\alpha_i} \\ \text{s.a.:} & \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = I \\ & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \end{cases}$$

es

$$x_i{}^* = A_i + \frac{\alpha_i}{p_i} \underbrace{\left(I - \sum_{i=1}^{n} p_i A_i \right)}_{\text{Excedente del ingreso}} .$$

Interprete.

Preferencias Stone Geary

Resolvamos aplicando la técnica de Lagrange, presentada previamente:

$$\max \ U(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - A_i)^{\alpha_i}$$

$$s.a. : \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = I$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Preferencias Stone Geary

Puesto que las transformaciones monótonas no afectan el orden de las preferencias, podemos maximizar $U^*(x_1, ..., x_n) = \ln[U(x_1, ..., x_n)]$

$$\max \ U^*(x_1, ..., x_n) = \ln\left[\prod_{i=1}^{n}(x_i - A_i)^{\alpha_i}\right] = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \ln(x_i - A_i)$$

$$s.a. : \ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = I$$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1.$$

Preferencias Stone Geary

La función Lagrangiana estaría entonces dada por

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu|\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln(x_i - A_i) + \lambda \left(I - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \right) + \mu \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right).$$

Aplicando las condiciones de primer orden

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\alpha_i}{x_i - A_i} - \lambda p_i = 0, \ \forall i$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = I - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = 1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0.$$

Preferencias Stone Geary

De la primera ecuación,

$$\alpha_i = \lambda p_i(x_i - A_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda p_i(x_i - A_i)$$

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda p_i(x_i - A_i)$$

$$\lambda = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i A_i}$$

$$\lambda = \frac{1}{I - \sum_{i=1}^{n} p_i A_i}.$$

Preferencias Stone Geary

Por ende,

$$\frac{\alpha_i}{\lambda p_i} = x_i - A_i$$

$$\frac{\alpha_i}{p_i \frac{1}{I - \sum_{i=1}^{n} p_i A_i}} + A_i = x_i$$

$$\frac{\alpha_i}{p_i}\left(I - \sum_{i=1}^{n} p_i A_i\right) + A_i = x_i.$$

Gracias