PUCP

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES

MATEMÁTICAS PARA ECONOMISTAS

PRÁCTICA DIRIGIDA 4

PROFESOR: JORGE R. CHÁVEZ

JEFES DE PRÁCTICA: JOAQUÍN RIVADENERYA & MARCELO GALLARDO

SEMESTRE 2022-2

FECHA 4-10-2022

Optimización sin restricciones.

1) La siguiente función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

representa la función de densidad de la distribución normal con media μ y varianza σ^2. Demuestre que $x^* = \mu$ es un máximo global.

2) En relación al problema del consumidor en su expresión más general

$$\begin{aligned} &\text{máx } u(x) \\ &px \leq I \\ &x \in \mathbb{R}^n_+. \end{aligned}$$

¿Qué condiciones impondría sobre la función de utilidad para que la solución es única? ¿En qué casos podría tenerse más de una solución? ¿Infinitas?

El problema de Lagrange.

3) Resuelva los siguientes problemas de optimización con restricciones y determine previamente si se puede asegurar la existencia de una solución al problema $\mathcal{P}_L$:

$$\mathcal{P}_L : \begin{cases} \text{máx} & f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\ \text{s.a.:} & x_1^2 + x_2^2 = 4 \end{cases}$$

$$\mathcal{P}_L : \begin{cases} \text{opt} & f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

4) Determine el radio r y la altura h que maximizan el volumen V de un cilindro cuya superficie S está dada. Use dos métodos diferentes.

Aplicaciones en microeconomía.

5) Resuelva el siguiente problema del consumidor

$$\mathcal{P}_C : \begin{cases} \text{máx} & x_1^\alpha x_2^\beta \\ \text{s.a.:} & p_1 x_1 + p_2 x_2 = I. \end{cases}$$

¿Cuál es la especificación de la función de utilidad? Obtenga la función de utilidad indirecta.

6) El problema de minimización del coste consiste en resolver

$$\begin{cases} \text{mín} & \sum_{i=1}^n w_i x_i \\ \text{s.a.:} & f(x_1, ..., x_n) = y, \end{cases}$$

dada una tecnología representada por la función de producción $f(x_1, ..., x_n)$, y un nivel de producción deseado y. Aquí w_i es el precio del factor de producción x_i. Resuelva el problema de minimización del coste para las siguientes funciones de producción (analice en función de los parámetros)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= A x_1^\alpha x_2^\beta \\ f(x_1, x_2) &= (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho} \\ f(x_1, x_2) &= \text{mín}\{a x_1, b x_2\} \\ f(x_1, x_2) &= \theta x_1 + \beta x_2. \end{aligned}$$

Asimismo, indique qué tipo de tecnología representan y relaciónelo con las especificaciones usadas en las funciones de utilidad. Finalmente, obtenga la función de costes $c(\boldsymbol{w}, y) = \sum_{i=1}^n w_i x_i^C(\boldsymbol{w}, y)$. Note que en este caso

$$c(\boldsymbol{w}, y) = c(w_1, w_2, y) = w_1 x_1^C(w_1, w_2, y) + w_2 x_2^C(w_1, w_2, y).$$

7) (Aplicación numérica). En relación al problema del productor:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & C(K, L) = rK + wL \\ \text{s.a.:} \quad & F(K, L) = K^{0.5} L^{0.5} = q, \end{aligned}$$

asuma $r = 2, w = 2$.

1. Resuelva el problema con las condiciones de Lagrange.
2. Resuelva el problema para una meta de producción q de 100 unidades e indique el nivel de costo mínimo.
3. Mediante el método de los multiplicadores de Lagrange, indique qué ocurre con el nivel mínimo de costo ante un aumento de 0.2 unidades en la meta de producción.
4. Explique por qué a λ se le llama precio sombra en este caso.

8) Se invierte x en dos activos. La varianza del retorno es

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\sigma_{12} x_1 x_2,$$

con σ_1^2 la varianza del activo 1, σ_2^2 la varianza del activo 2 y σ_{12} la covarianza entre los 2 activos. Asimismo, x_1 es la fracción invertida en el activo 1 y x_2 en el activo 2. Plantee el problema de optimización del inversionista (minimizar la varianza) teniendo en cuenta que $x = 1$.

Ejercicios de profundización, no evaluables.

1) (Aplicaciones en métodos computaciones). El siguiente problema de optimización aparece naturalmente a la hora de resolver algorítmicamente problemas de optimización. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, el objetivo es maximizar el mayor incremento de f sujeto a $||d\boldsymbol{x}/ds|| = 1$. Concretamente, definiendo $\omega_j = dx_j/ds$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \text{máx}_{\omega_j} & \frac{df}{ds} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{dx_j}{ds} \\ \text{s.a.} : & \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial x_j}{\partial s}\right)^2 = 1. \end{cases}$$

Resuelva el problema y halle la función valor óptimo.

2) Demuestre que la solución al siguiente problema de maximización de la utilidad

$$\mathcal{P}_C : \begin{cases} \text{máx} & U(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n}(x_i - A_i)^{\alpha_i} \\ \text{s.a.:} & \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = I \\ & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ \ \alpha_i, A_i > 0 \end{cases}$$

es

$$x_i^* = A_i + \frac{\alpha_i}{p_i}\left(I - \sum_{i=1}^{n} p_i A_i\right).$$

Interprete. *Esta función de utilidad se conoce como Stone-Geary.*

3) (Aplicaciones en inferencia estadística). El objetivo de este problema es determinar el MELI (Mejor Estimador Lineal Insesgado) obtenido vía Mínimos Cuadrados Ordinarios.

1. Defina lo que es un *estimador*.

2. Defina lo que es el *MELI*.

3. Explique, usando la definición del inciso previo, porque si $\hat{\theta}$ es el MELI del parámetro θ, $\hat{\theta}$ resuelve el siguiente problema de optimización

$$\mathcal{P}_{MELI} : \begin{cases} \text{mín} & \sum_{i=1}^{n} c_i \text{Var}[X_i] \\ \text{s.a.} : & \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{E}[X_i] = \theta. \end{cases}$$

   Aquí $\{X_1, ..., X_n\}$ es una muestra aleatoria.