PUCP

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES

MATEMÁTICAS PARA ECONOMISTAS

PRÁCTICA DIRIGIDA 2

PROFESOR: JORGE R. CHÁVEZ

JEFES DE PRÁCTICA: JOAQUÍN RIVADENERYA & MARCELO GALLARDO

SEMESTRE 2022-2

FECHA 26-09-2022

Funciones cuasiconvexas, cuasicóncavas y aplicaciones.

1. Pruebe que la función $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ es cuasicóncava.

La función $f(x)$ es una composición de la función $-x^2$, la cual es cóncava y, por lo tanto, cuasicóncava; y la función e^x, la cual es creciente. Por lo tanto, $f(x)$ es cuasicóncava. Se puede probar también usando la definición.

2. Pruebe que las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = -2x$ son cuasiconvexas. Sin embargo, pruebe que $f(x) + g(x)$ no es cuasiconvexa ni cuasicóncava.

Recordemos que, por definición, una función es cuasiconvexa si

$$\mathcal{L}(r) = \{x \in \text{dom} f(x) / f(x) \leq r\}$$

es un conjunto convexo para todo $r \in \mathbb{R}$.

Para la función $f(x) = x^3$

$$\mathcal{L}(r) = \{x \in \mathbb{R} / x^3 \leq r\}$$
$$\mathcal{L}(r) = \{x \in \mathbb{R} / x \leq \sqrt[3]{r}\}$$
$$\mathcal{L}(r) =]-\infty, \sqrt[3]{r}]$$

es un conjunto convexo, por lo que $f(x)$ es cuasiconvexa.

De manera similar se puede probar la cuasiconvexidad de la función $g(x)$

La función $f(x) + g(x) = x^3 - 2x = x(x^2 - 2)$ no es cuasiconvexa ni cuasicóncava, pues, por ejemplo, para $r = 0$:

$$\mathcal{L}(r) = \{x \in \text{dom} f(x) / f(x) \leq r\}$$
$$\mathcal{L}(r) = \{x \in \mathbb{R} / x(x^2 - 2) \leq 0\}$$
$$\mathcal{L}(r) =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [0, \sqrt{2}]$$

no es un conjunto convexo, por lo que la función $f(x) + g(x)$ no es cuasiconvexa.
Además, recordemos que para que, por definición, una función sea cuasicóncava, el conjunto $\mathcal{U}(r)$ debe ser convexo. Veamos:

$$\mathcal{U}(r) = \{x \in \text{dom} f(x) / f(x) \geq r\}$$
$$\mathcal{U}(r) = \{x \in \mathbb{R} / x(x^2 - 2) \geq 0\}$$
$$\mathcal{U}(r) = [-\sqrt{2}, 0] \cup [\sqrt{2}, \infty[$$

no es un conjunto convexo, por lo que la función $f(x) + g(x)$ tampoco es cuasicóncava.

3. Pruebe que $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ es cuasiconvexa, donde

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}, & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

4. Pruebe que la función del ejercicio anterior no es convexa.

5. Sea $U = U(x_1, x_2)$ una función de utilidad. Pruebe que

$$TMS = \frac{U_1}{U_2} = \frac{\partial U / \partial x_1}{\partial U / \partial x_2}$$

es decreciente si U es cuasicóncava. ¿Qué puede deducir sobre la cuasiconcavidad y la convexidad de las preferencias?
Dada $U : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}$,

$$M_{r=2} = \begin{pmatrix} 0 & U_x & U_y \\ U_x & U_{xx} & U_{xy} \\ U_y & U_{yx} & U_{yy} \end{pmatrix}.$$

Tenemos que, U es cuasicóncava si

$$(-1)^1(-U_x^2) > 0 \text{ (se verifica)}$$

$$(-1)^2(-U_x(U_xU_{yy}-U_{xy}U_y)+U_y(U_xU_{yx}-U_{xx}U_y))>0$$
$$\implies -U_x^2U_{yy}+2U_{xy}U_xU_y-U_{xx}U_y^2>0.$$

Luego, se cumple que

$$\frac{d}{dx}(TMS)=\frac{d}{dx}\left(\frac{U_x}{U_y}\right)=\frac{U_x^2U_{yy}-2U_{xy}U_xU_y+U_{xx}U_y^2}{U_y^3}.$$

En efecto, por la regla de la cadena (considerando $y=y(x)$)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\frac{U_x}{U_y}\right]&=\frac{\frac{dU_x}{dx}U_y-\frac{dU_y}{dx}U_x}{U_y^2}\\&=\frac{\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial U(x,y(x))}{\partial x}\right]U_y-\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial U(x,y(x))}{\partial y}\right]U_x}{U_y^2}\\&=\frac{\left(U_{xx}+U_{xy}\frac{dy}{dx}\right)U_y-\left(U_{xy}+U_y^2\frac{dy}{dx}\right)}{U_y^2}.\end{aligned}$$

Como $dy/dx=-U_x/U_y$, finalmente tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\frac{U_x}{U_y}\right]&=\frac{1}{U_y^2}\left[U_yU_{xx}-\frac{U_yU_xU_{xy}}{U_y}-\frac{U_{xy}U_xU_y}{U_y}+\frac{U_{xy}U_xU_x}{U_y}\right]\\&=\frac{1}{U_y^2}\left[\frac{U_y^2U_{xx}}{U_y}-\frac{U_yU_xU_{xy}}{U_y}-\frac{U_{xy}U_xU_y}{U_y}+\frac{U_{xy}U_xU_x}{U_y}\right]\\&=\frac{U_x^2U_{yy}-2U_{xy}U_xU_y+U_{xx}U_y^2}{U_y^3}<0.\end{aligned}$$

Por ende, $TMS'<0$ (pues $U_y>0$).

6. Analice la cuasiconvexidad o cuasiconcavidad de las siguientes funciones. Luego, identifique cuales pueden ser usadas como funciones de utilidad.

6.1) $f(x_1,x_2)=\sqrt{x_1+x_2}$.

6.2) $f(x_1,x_2)=\exp(x_1x_2)$.

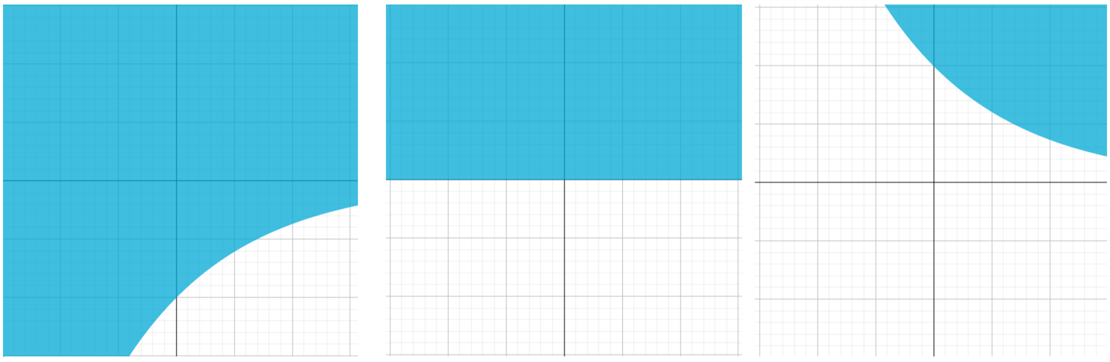
6.3) $f(x_1,x_2)=\ln(x_1x_2)$.

6.4) $f(x_1,x_2)=x_2e^{x_1}$.

Por definición, para que la función sea cuasicóncava, el conjunto $\mathcal{U}(r)$ debe ser convexo:

$$\mathcal{U}(r)=\{\bar{x}\in \mathrm{dom} f(\bar{x})/f(\bar{x})\geq r\}$$
$$\mathcal{U}(r)=\{\bar{x}\in \mathbb{R}^2/ye^x\geq r\}$$
$$\mathcal{U}(r)=\{\bar{x}\in \mathbb{R}^2/y\geq re^{-x}\}$$

Si graficamos el conjunto $\mathcal{U}(r)$ vemos que este no es convexo para todo $r \in \mathbb{R}$. De izquierda a derecha, para $r < 0$, $r = 0$ y $r > 0$, respectivamente, la gráfica del conjunto $\mathcal{U}(r)$ es:



Como se observa, el conjunto $\mathcal{U}(r)$ no es convexo para $r < 0$, por lo que la función no es cuasicóncava. Sin embargo, para que esta última represente una función de utilidad se debe restringir el dominio de la función al primer cuadrante, en donde el conjunto $\mathcal{U}(r)$ sí es convexo para todo $r \in \mathbb{R}$, y por lo tanto la función sí es cuasicóncava. Por ello, sí se le podría usar como función de utilidad.

Por otro lado, se puede analizar utilizando el conjunto $\mathcal{L}(r)$ la cuasiconvexidad de la función.

6.5) $f(x_1, x_2) = Ax_1^{0.5}x_2^{0.5}, \ A > 0.$

6.6) $f(x_1, x_2) = \min\left\{\dfrac{x_1}{\alpha_1}, \dfrac{x_2}{\alpha_2}\right\}, \ \alpha_i > 0.$

6.7) $f(x_1, x_2) = (x_1^{1/3} + x_2^{1/3})^3.$

6.8) $f(x_1, x_2, x_3) = \text{mín}\{x_1 + x_2, x_3\}.$

Primero, establezcamos que el mínimo de dos funciones cóncavas es cóncava. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones de utilidad cóncavas, la función $u(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$ también lo es. Por definición, si $f(x)$ y $g(x)$ son cóncavas, definiendo $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, para todo $\lambda \in [0, 1]$:

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \leq f(z)$$

$$\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \leq g(z)$$

De aquí, tomando mínimos, se notan las desigualdades:

$$\lambda\,\text{mín}\{f(x), g(x)\} + (1-\lambda)\,\text{mín}\{f(y), g(y)\} \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \leq f(z)$$

y de manera análoga

$$\lambda \min\{f(x), g(x)\} + (1-\lambda) \min\{f(y), g(y)\} \leq \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y) \leq g(z)$$

por lo tanto:

$$\lambda \min\{f(x), g(x)\} + (1-\lambda) \min\{f(y), g(y)\} \leq \min\{f(z), g(z)\}$$

lo cual prueba que la función $\min\{f(x), g(x)\}$ es cóncava.
Entonces, la función $f(x_1, x_2, x_3) = \min\{x_1 + x_2, x_3\}$ es cóncava y, por lo tanto, cuasicóncava, por lo que sí se le podría considerar como una posible función de utilidad.

7. Sea f una función positiva y cóncava, determine si la funciones $g(x) = \ln[f(x)]$ y $h(x) = e^{f(x)}$ son cuasicóncavas.

Introducción a la optimización.

8. Encuentre los puntos estacionarios de las siguientes funciones (en caso existan) y determine su naturaleza aplicando el criterio de la matriz Hessiana.
Recordemos que los puntos estacionarios de una fucnión son aquellos en los que su gradiente se anula. Además, si la matriz Hessiana demuestra la convexidad (concavidad) de la función a lo largo de todo su dominio, el punto estacionario es mínimo (máximo) global (Condición suficiente de primer orden). Si la matriz Hessiana exhibe convexidad (concavidad) en el punto estacionario, entonces el punto estacionario es mínimo (máximo) local (Condición suficiente de segundo orden).
8.1) $f(x) = e^x - x$.
Calculamos el punto estacionario:

$$f'(x) = e^x - 1 = 0 \to x^* = 0$$

Con el criterio de la segunda derivada:

$$f''(x) = e^x \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$$

Como la segunda derivada es positiva para todo el dominio de la función, la función es convexa y el punto estacionario representa un mínimo global.
8.2) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Calculando el punto estacionario:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = 0 \to \bar{x}^* = (0,0)$$

La matriz hessiana es

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que es positivo definida para todo el dominio de la función, por lo que la función es convexa. Entonces, el punto estacionario $(0,0)$ es mínimo global.

8.3) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 - x_2^4 + 2x_1 - 2x_2$.

8.4) $f(x_1, x_2) = e^{1+ax_1^2+bx_2^2}$.

Calculando el punto estacionario:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2axf(x,y) \\ 2ayf(x,y) \end{pmatrix} = 0 \to \bar{x}^* = (0,0)$$

La matriz hessiana es

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4a^2x^2f(x,y) + 2af(x,y) & 4abxyf(x,y) \\ 4abxyf(x,y) & 4b^2y^2f(x,y) + 2bf(x,y) \end{pmatrix}$$

y evaluándola en el punto estacionario, la matriz hessiana

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2ae & 0 \\ 0 & 2be \end{pmatrix}$$

es negativo semidefinida si a y b son mayores o iguales a 0. Es positivo semidefinida si a y b son menores o iguales a 0. Es indefinida si a y b son de signo distinto. En el primer caso, el punto estacionario será mínimo local; en el segundo caso, será máximo local; en el tercer caso, será un punto silla.

8.5) $f(x_1, x_2) = x_1^4 - x_1^2x_2^2 + x_2^3 - 18x_1^2 + 3x_2^2$.

8.6) $f(x_1, x_2) = x_1x_2 \ln(x_1^2 + x_2^2)$.

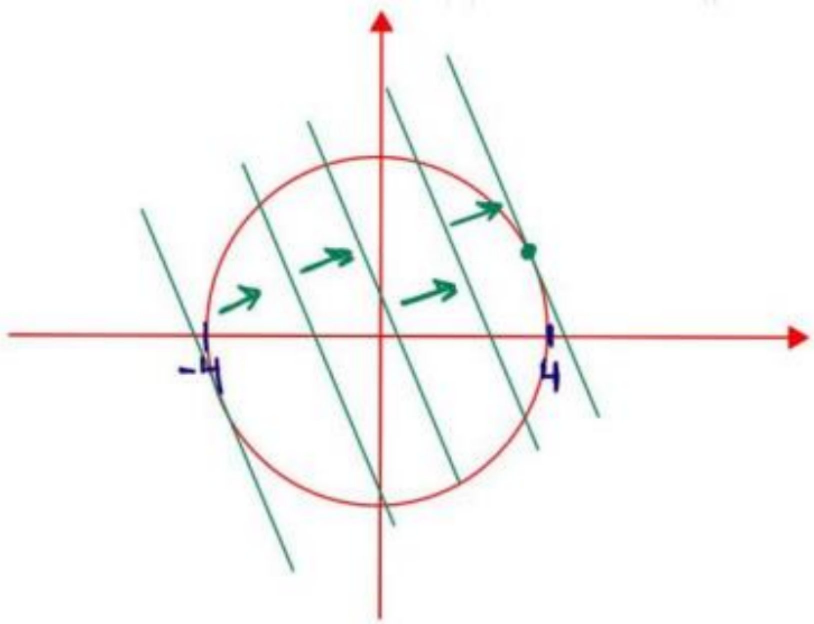
9. Determine gráficamente la solución a los siguientes problemas de optimización

$$9.0) \begin{cases} \text{máx} & f(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2 + 6 \\ \text{s.a.} & x_1^2 + x_2^2 = 16. \end{cases}$$

En primer lugar, sabemos que el problema tiene solución. La función objetivo es continua (es polinómica) y el conjunto de oportunidad delimitado por la restricción es un conjunto compacto (es una circunferencia de radio finito). Calculemos la forma de las curvas de nivel de la función objetivo:

$$2x_1 + x_2 + b = c$$
$$x_2 = x - 6 - 2x_1$$

Las curvas de nivel son rectas con pendiente igual a -2. Por otro lado, la gradiente de la función objetivo es $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, lo que indica que en la dirección de ese vector se maximiza la función objetivo. Además, la solución debe cumplir con la restricción, que se grafica como una circunferencia centrada en el origen y de radio igual a 4. Gráficamente:



Se puede notar que el punto dibujado es el óptimo del problema, y es un punto de tangencia.
Calculamos la pendiente de la circunferencia derivando implícitamente:

$$
\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 &= 16 \\
2x_1 + 2x_2x_2' &= 0 \\
x_1 + x_2x_2' &= 0 \\
x_2' &= -\frac{x_1}{x_2}
\end{aligned}
$$

Como la pendiente de la curva de nivel es -2, entonces para encontrar el punto de tangencia igualamos pendientes:

$$
\begin{aligned}
-\frac{x_1}{x_2} &= -2 \\
x_1 &= 2x_2
\end{aligned}
$$

Luego, el punto óptimo debe cumplir con la restricción:

$$
\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 &= 16 \\
(2x_2)^2 + x_2^2 &= 16 \\
5x_2^2 &= 16 \\
x_2 &= \pm\sqrt{\frac{16}{5}}
\end{aligned}
$$

Por último, elegimos el valor positivo y calculamos x_1:

$$
\begin{aligned}
x_2^* &= \frac{4}{\sqrt{5}} \\
x_1^* &= \frac{8}{\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

La función objetivo evaluada en el punto que la maximiza; es decir, el valor máximo de la función objetivo es:

$$
f^*(x_1, x_2) = \frac{16}{\sqrt{5}} + 6
$$

$$9.1) \begin{cases} \text{máx} & u(x_1, x_2) = x_1 x_2 \\ \text{s.a.} & ax_1 + bx_2 = 2. \end{cases}$$

$$9.2) \begin{cases} \text{máx} & u(x_1, x_2) = \theta x_1 + \eta x_2 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

10. Si x^* es un mínimo de f, pruebe que x^* es un máximo de $-f$.

11. Considere las funciones $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definamos $g : S \to \mathbb{R}$ por $g = h(f(x))$. Pruebe que, si h es creciente y x^* maximiza (o minimiza) f sobre S, entonces x^* maximiza (o minimiza) g sobre S.
Si x^* maximiza a f sobre S, entonces, por definición:

$$f(x^*) \geq f(x) \; \forall x \in S$$

Si aplicamos la función h a ambos lados de la desigualdad, la desigualdad se mantiene porque h es creciente:

$$h(f(x^*)) \geq h(f(x)) \; \forall x \in S$$

$$g(x^*) \geq g(x) \; \forall x \in S$$

Con lo que queda demostrado que x^* maximiza a g sobre S. Se realiza el procedimiento análogo con el caso en que x^* maximiza a f.

12. Si x^* es un punto óptimo de f analice el punto óptimo de g para
12.1) $g(x) = af(x) + b, \;\; a, b \in \mathbb{R}, \;\; a > 0.$
12.2) $g(x) = e^{f(x)}$.
12.3) $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

13. Con respecto a la función

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3, \;\; (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

analice si f posee mínimo o máximo locales. Determine si es posible aplicar el Teorema de Weierstrass.

El teorema de Weierstrass no se puede aplicar porque el conjunto de oportunidad es el dominio de la función, $\mathbb{R}^3$, que no es un conjunto compacto.
Ahora bien, calculemos el punto estacionario:

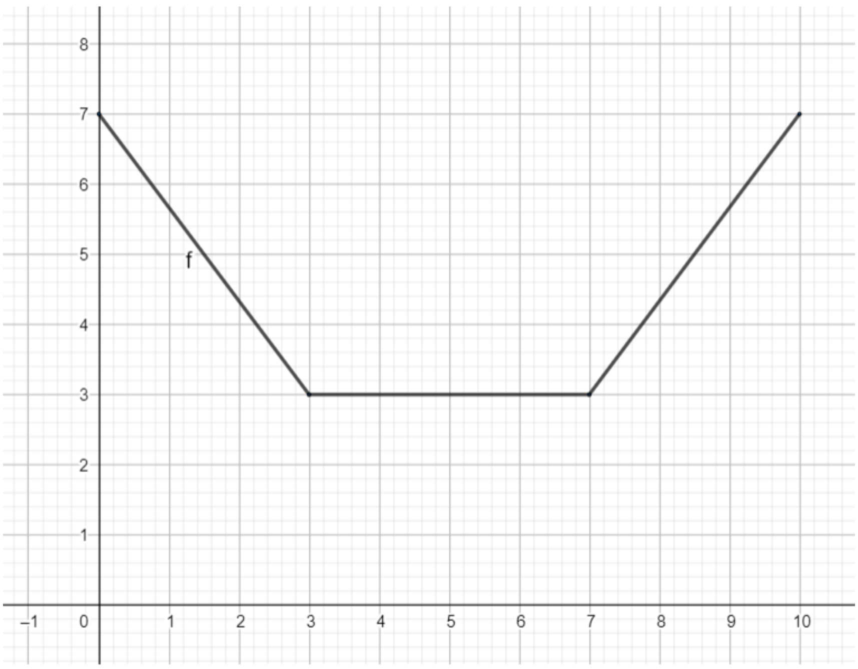
$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1 + 8x_2 + 4x_3 \\ 4x_2 + 8x_1 + 4x_3 \\ 4x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} = 0 \to \bar{x}^* = (0,0,0)$$

La matriz hessiana es

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 8 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

La cual es indefinida (se puede comprobar), por lo que el punto estacionario es un punto silla.

14. ¿Es posible que una función convexa posea más de un mínimo global?
Sí. Por ejemplo, la siguiente función



tiene infinitos puntos mínimos globales.

15. Con respecto a la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - a)^{2m} + (x_2 - b)^{2n} + c,$$

a, b, c constantes y $m, n \in \mathbb{N}$, se le pide que resuelva las siguientes cuestiones.

15.1) ¿Cuál es el punto mínimo de la función?

15.2) ¿Cuál es valor mínimo de la función?

15.3) ¿Tiene puntos máximos la función f?

16. Defina la función de producción tipo CES (Constant Elasticity of Substitution)

$$f(k, \ell) = (\alpha_1 k^{-\rho} + \alpha_2 \ell^{-\rho})^{-\sigma/\rho}.$$

Demuestre que el punto óptimo (k^*, ℓ^*) del problema del productor satisface la relación

$$\frac{r}{w} = \frac{\alpha_1 k^{-\rho-1}}{\alpha_2 \ell^{-\rho-1}}.$$

Al resolver el promlema de maximización de beneficios:

$$\max \Pi = p(\alpha_1 k^{-\rho} + \alpha_2 \ell^{-\rho})^{-\sigma/\rho} - wl - rk$$

Se debe cumplir, por condición de primer orden:

$$\nabla \Pi = \begin{pmatrix} -p\frac{\sigma}{\rho}(\alpha_1 k^{-\rho} + \alpha_2 \ell^{-\rho})^{-\sigma/\rho-1}(-\rho)\alpha_2 l^{-\rho-1} - w \\ -p\frac{\sigma}{\rho}(\alpha_1 k^{-\rho} + \alpha_2 \ell^{-\rho})^{-\sigma/\rho-1}(-\rho)\alpha_1 k^{-\rho-1} - r \end{pmatrix} = 0$$

Definamos $A = -p\frac{\sigma}{\rho}(\alpha_1 k^{-\rho} + \alpha_2 \ell^{-\rho})^{-\sigma/\rho-1}(-\rho)$:

$$\nabla \Pi = \begin{pmatrix} A\alpha_2 l^{-\rho-1} - w \\ A\alpha_1 k^{-\rho-1} - r \end{pmatrix} = 0$$

Despejando A de ambas ecuaciones e igualando, resulta la igualdad:

$$\frac{r}{w} = \frac{\alpha_1 k^{-\rho-1}}{\alpha_2 \ell^{-\rho-1}}.$$

que es lo que queríamos demostrar.

17. Resuelva el problema del productor para una especificación Cobb-Douglas, es decir, resuelva

$$\text{máx } \Pi = p x_1^{\alpha} x_2^{\beta} - w x_1 - r x_2,$$

donde x_1 es el trabajo y x_2 el capital.

18. Resuelva el siguiente problema del monopolista

$$\max_{y^d, y^m} \Pi = (100 - y^d)y^d + 60y^m - 0.5(y^m + y^d)^2.$$

Aquí $p = 60$ es el precio en el mercado mundial del bien y, $p = 100 - y^d$ es la demanda doméstica, y $0.5(y^m + y^d)^2$ son los costos de producción.

19. La siguiente función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

representa la función de densidad de la distribución normal con media μ y varianza σ^2. Demuestre que $x^* = \mu$ es un máximo global.

20. En relación al problema del consumidor en su expresión más general

$$\begin{aligned} \max\ & u(x) \\ & px \leq I \\ & x \in \mathbb{R}^n_+ \end{aligned}$$

¿Qué condiciones sobre las preferencias impondría para que la solución sea única? ¿En qué casos podría tenerse más de una solución? ¿Infinitas?

Ejercicios no evaluables en PCs

1. En el caso de una regresión lineal simple, los estimadores obtenidos vía Mínimos Cuadrados Ordinarios se obtienen resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$\min_{(\beta_0,\beta_1)} \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = Q(\beta_0,\beta_1) = \sum_{i=1}^{n}(Y_i-\beta_0-\beta_1 X_i)^2.$$

Demuestre que la solución es

- $\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1\overline{X}$.
- $\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})(X_i-\overline{X})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$.

Luego, pruebe que se trata efectivamente de un mínimo global.

2. Sea $(x_1, x_2, ..., x_n)$ una muestra aleatoria correspondiente a una distribución normal $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Se define la función de verosimilitud por:

$$L(x_1,x_2,...,x_n;\mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\mu,\sigma^2) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}. \tag{1}$$

Se denominan los estimadores de máxima verosimilitud de μ y σ^2 (que se denotan por $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}^2$) a los valores para los que se alcanza el máximo valor de la función definida en (1). Calcular $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}^2$, comprobando que se trata de un máximo.

3. Muestre que el siguiente problema tiene solución ($A \in \mathcal{M}_{n\times n}$)

$$\mathcal{P}: \begin{cases} \text{máx} \quad \operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \\ \text{s.a.} \quad AA^T = I. \end{cases}$$

4. Demuestre que la siguiente función (Cobb-Douglas para n bienes) es cuasicóncava

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}.$$