PUCP

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES

MATEMÁTICAS PARA ECONOMISTAS IV

PRÁCTICA DIRIGIDA 2

PROFESOR: JORGE R. CHÁVEZ

JEFES DE PRÁCTICA: JOAQUÍN RIVADENERYA & MARCELO GALLARDO

SEMESTRE 2022-2

FECHA 13-09-2022

Relaciones de preferencias

1. Sea $P = (1, 1)$. Trace para cada relación de preferencia, representada a través de la función de utilidad U, los conjuntos I_P y $\overline{C}_P$. Luego, determine si $\preceq$ es convexa.

1.1) $U(x, y) = \text{mín}\{x, y\}$.

1.2) $U(x, y) = xy$.

1.3) $U(x, y) = x + y$.

En los 3 casos, la relación de preferencias es convexa. En efecto:

1.1) Definimos $z = \theta x + (1 - \theta)y$,

$$\text{mín}\{z_1, z_2\} = \{\theta x_1 + (1 - \theta)y_1, \theta x_2 + (1 - \theta)y_2\}.$$

Luego, como $x \preceq y$, $\text{mín}\{x_1, x_2\} \leq \text{mín}\{y_1, y_2\}$

$$x_1 \leq \theta x_1 + (1 - \theta)y_1$$

y

$$x_2 \leq \theta x_2 + (1 - \theta)y_2.$$

Así,

$$\text{mín}\{x_1, x_2\} \leq \text{mín}\{z_1, z_2\} \implies x \preceq z.$$

1.2) Sea $x \preceq y$, queremos $z = \theta x + (1 - \theta)y \succeq x$. Definimos $c_x = x_1 x_2$ y $c_y = y_1 y_2$ y

$c_z = z_1 z_2$ con $z_1 = \theta x_1 + (1-\theta)y_1$, $z_2 = \theta x_2 + (1-\theta)y_2$. Entonces,

$$\begin{aligned}
c_z &= (\theta x_1 + (1-\theta)x_2)\left(\theta \frac{c_x}{x_1} + (1-\theta)\frac{c_y}{y_1}\right) \\
&= \theta^2 c_x + \theta(1-\theta)\frac{x_1}{y_1}c_y + \theta(1-\theta)\frac{y_1}{x_1}c_x + (1-\theta)^2 c_y \\
&\geq \left(\theta^2 + \theta(1-\theta)\left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{y_1}{x_1}\right) + (1-\theta)^2\right) c_x.
\end{aligned}$$

Luego, como $(a+b)^2 \geq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{a^2+b^2}{2} &\geq \sqrt{a^2b^2} \\
\frac{a^2+b^2}{ab} &\geq 2 \\
\frac{a}{b} + \frac{b}{a} &\geq 2.
\end{aligned}$$

Finalmente, el resultado previo,

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &\geq (\theta^2 + 2\theta(1-\theta) + (1-\theta)^2)c_x \\
&= c_x \\
&= x_1 x_2.
\end{aligned}$$

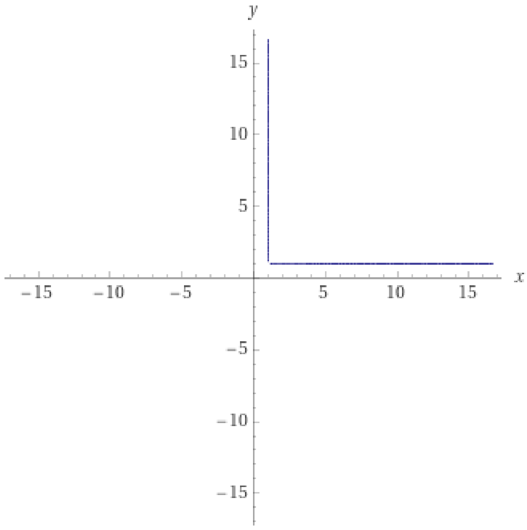
Con esto, concluimos lo solicitado.

1.3) Si $x \preceq y \Leftrightarrow x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$. Luego, usando la definición de $\theta x + (1-\theta)y$ dada en (**??**)

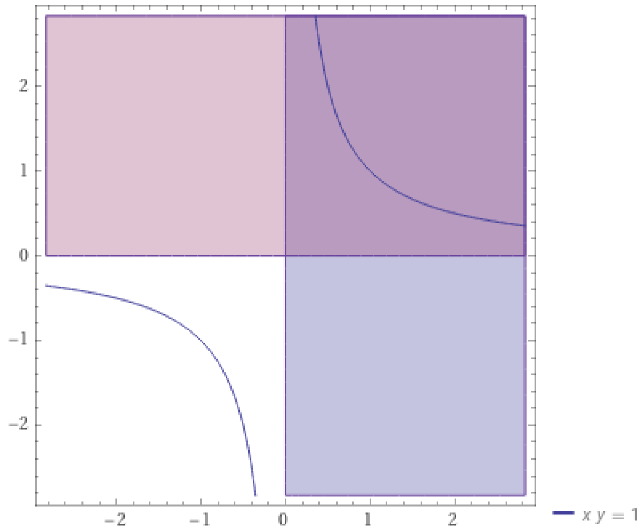
$$\begin{aligned}
\theta x_1 + (1-\theta)y_1 + \theta x_2 + (1-\theta)y_2 &= \theta(x_1+x_2) + (1-\theta)(y_1+y_2) \\
&\geq \theta(x_1+x_2) + (1-\theta)(x_1+x_2) \\
&= x_1 + x_2.
\end{aligned}$$

Por ende, se cumple que $\preceq$ es convexa.

En relación a I_P y $\overline{C}_P$, estos corresponden a la curva de indiferencia y control superior asociados al punto $P = (1,1)$. Para $U(x,y) = \text{mín}\{x,y\}$, $U(1,1) = 1$. Por ende

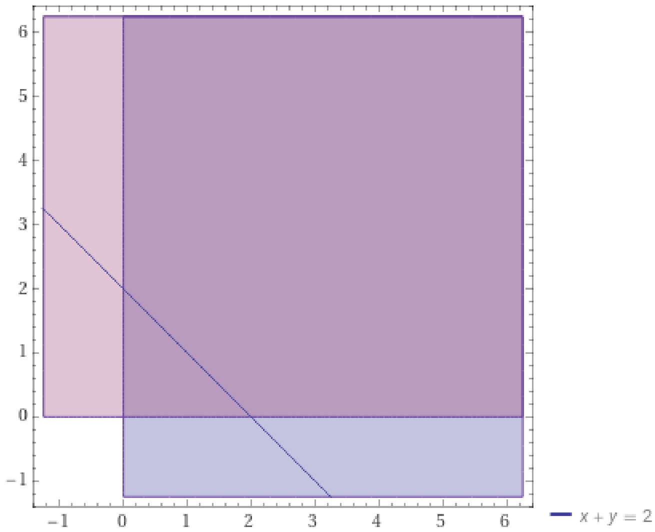


En el caso $U(x, y) = xy$, representamos $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : \ xy = 1\}$



Es la curva en el cuadrante morado intersecando el azul pues $x, y \geq 0$.

Finalmente, en el caso $U(x, y) = x + y$, $U(1, 1) = 2$ y así,



Nuevamente, es la curva (recta) en el cuadrante morado intersecando el azul pues $x, y \geq 0$.

2. Provea una ejemplo de relación de preferencia que no es continua pero que sí es racional.
Considere las referencias lexicográficas definidas de la siguiente manera, si $x_1^1 > x_1^2$, $\boldsymbol{x}_1 \succ \boldsymbol{x}_2$. Si $x_1^1 = x_1^2$, se analiza x_2^1 versus x_2^2, y así sucesivamente.

- Son transitivas.
- Son completas.
- No son continuas.

Considere $x_n = (1/n, 0, ..., 0)$ y $y_n = (0, 1 + 1/n, 0, ..., 0)$ y verifique que la definición de preferencias continua no cumple.

Funciones convexas y cóncavas

3. Analice la convexidad o concavidad de las siguientes funciones sobre su dominio de definición. *Sugerencia: use los teoremas de aritmética y composición de funciones convexas y cóncavas.*

3.1) $f(x_1, x_2) = \ln(x_1 + x_2)$.

3.2) $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + x_2}$.

3.3) $f(x_1, x_2, x_3) = \exp(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 5)$.

La función $f(x_1, x_2) = \ln(x_1 + x_2)$ es cóncava pues es la composición de una función cóncava creciente $\ln(\cdot)$ con una función cóncava (las funciones lineales son convexas y cóncavas a la vez). Análogamente, $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + x_2}$ es cóncava pues $\sqrt{\cdot}$ es cóncava y creciente. Finalmente, la función $f(x_1, x_2, x_3) = \exp(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 5)$ es convexa pues es la composición de la función creciente y convexa $\exp(\cdot)$ con la suma de 3 funciones convexas y una constante, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 5$. Note que se hace uso del teorema de composición y aritmética de funciones convexas y cóncavas.

4. Pruebe usando la definición que la función:

4.1) $\frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}_{++}$ es estrictamente convexa.
4.2) $\sqrt{x}, x \in \mathbb{R}_{+}$ es estrictamente cóncava.

4.1) Queremos probar que, dado $\theta \in [0, 1]$,

$$\frac{1}{\theta x + (1 - \theta)y} \leq \frac{1}{\theta x} + \frac{1}{(1 - \theta)y}.$$

Esto es lo mismo que,

$$\frac{1}{\theta(x - y) + y} \leq \frac{\theta(y - x) + x}{xy}.$$

Multiplicando por xy y $\theta(x - y) + y$, se obtiene

$$\begin{aligned}
xy &\leq (\theta(x - y) + y)(\theta(y - x) + x) \\
&= -\theta^2(x - y)^2 + \theta y(y - x) + \theta x(x - y) + xy \\
&= -\theta^2(x - y)^2 + \theta(x - y)^2 + xy \\
&= \theta(1 - \theta)(x - y)^2 + xy.
\end{aligned}$$

4.2) Se tiene que probar que, dado $\theta \in [0, 1]$

$$\theta\sqrt{x} + (1 - \theta)\sqrt{y} \leq \sqrt{\theta x + (1 - \theta)y}.$$

Elevamos al cuadrado,

$$(\theta\sqrt{x} + (1 - \theta)\sqrt{y})^2 \leq \theta x + (1 - \theta)y.$$

Luego,

$$\theta^2 x + 2\theta(1 - \theta)\sqrt{xy} + (1 - \theta)^2 y \leq \theta x + (1 - \theta)y.$$

Esto es equivalente a

$$2\theta(1 - \theta)\sqrt{xy} \leq \theta(1 - \theta)x + \theta(1 - \theta)y.$$

Dividiendo por $\theta(1-\theta)$ (ojo, si $\theta = 0$ o $\theta = 1$ es trivial)

$$2\sqrt{xy} \leq x + y.$$

Elevando al cuadrado,

$$4xy \leq x^2 + 2xy + y^2.$$

O sea,

$$0 \leq x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2.$$

Lo cual es cierto pues $a^2 \geq 0$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$.

5. Analice si la función norma $f(x) = ||x||$ es estrictamente convexa, para $x \in \mathbb{R}^n$.

Veamos que se trata de una función convexa. Sea $\theta \in [0,1]$

$$\begin{aligned} ||\theta x + (1-\theta)y|| &\leq ||\theta x|| + ||(1-\theta)y|| \\ &= \theta||x|| + (1-\theta)||y||. \end{aligned}$$

Se hace simplemente uso de la desigualdad triangular.

6. Utilizando argumentos de epígrafo o hipógrafo, analice la convexidad o concavidad de la función:

6.1) $f(x) = -x^2$. Cóncava sobre todo su dominio, pues su hipógrafo es un conjunto convexo.

6.2) $f(x) = x^3$. No es convexa ni cóncava, puesto que ni su epígrafo ni su hipógrafo es un conjunto convexo.

Funciones convexas y cóncavas diferenciables

7. Usando criterios de diferenciabilidad, analice la convexidad o concavidad de las siguientes funciones. *Sugerencia: calcule la matriz Hessiana en cada caso.*

7.1) $f(x) = x \ln x$, $\mathrm{Dom}(f) = (0, +\infty)$. Estrictamente convexa, pues $f''(x) = \dfrac{1}{x}$ es estrictamente positiva para todo el dominio de la función.

7.2) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2_{++}$. No es cóncava ni convexa, pues $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz indeterminada (no es positiva ni negativa), pues su determinante es negativo.

7.3) $f(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2$, $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}^2$. No es cóncava ni convexa, pues $H=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ es una matriz indeterminada (no es positiva ni negativa), pues su determinante es negativo.

7.4) $f(x_1,x_2)=e^{x_1^2+x_2^2}$, $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}^2$. Es estrictamente convexa, pues

$$H=\begin{pmatrix}4x^2e^{x^2+y^2}+2e^{x^2+y^2} & 4xye^{x^2+y^2}\\ 4xye^{x^2+y^2} & 4y^2e^{x^2+y^2}+2e^{x^2+y^2}\end{pmatrix}$$

es una matriz positivo definida (hállese sus valores característicos o verifíquese que sus menores principales conducentes son todas estrictamtne positivas).

7.5) $f(x_1,x_2)=\ln(x_1x_2)$, $\mathrm{Dom}(f)=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:\ x_2x_1>0\}$. Es estrictamente cóncava, pues $H=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{-x^2} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{-y^2}\end{pmatrix}$ es una matriz negativo definida (hállense sus valores característicos o verifíquese que sus menores principales conducentes son todas de signo intercalado y distintas de cero).

7.6) $f(x,y,z)=\ln(x+y)$, $\mathrm{Dom}(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x+y>0\}$. Es cóncava, pues

$$H=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{(x+y)^2} & -\dfrac{1}{(x+y)^2}\\ -\dfrac{1}{(x+y)^2} & -\dfrac{1}{(x+y)^2}\end{pmatrix}$$

es una matriz negativo semidefinida (hállense sus valores característicos o verifíquese que sus menores principales conducentes son todas de signo intercalado o iguales a cero).

7.7) $f(x,y)=\sqrt{x+y}$, $\mathrm{Dom}(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x+y\geq 0\}$. Es cóncava, pues

$$H=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{4(x+y)^{2/3}} & -\dfrac{1}{4(x+y)^{2/3}}\\ -\dfrac{1}{4(x+y)^{2/3}} & -\dfrac{1}{4(x+y)^{2/3}}\end{pmatrix}$$

es una matriz negativo semidefinida (hállense sus valores característicos o verifíquese que sus menores principales arbitrarios son todas de signo intercalado o iguales a cero).

7.8) $f(x,y)=x+y-e^x-e^y$, $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}^2$. Es estrictamente cóncava, debido a que $H=\begin{pmatrix}-e^x & 0\\ 0 & -e^y\end{pmatrix}$ es una matriz negativo definida (hállense sus valores característicos o verifíquese que sus menores principales conducentes son todas de signos intercalados y distintas a cero).

7.9) $f(x,y,z) = x^2 + 12y^2 + 4z^2 - 6xy - 2xz + 12yz$, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^3$. Es convexa, debido a que $H = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -2 \\ -6 & 24 & 12 \\ -2 & 12 & 8 \end{pmatrix}$ es una matriz positivo semidefinida (hállense sus valores característicos o verifíquese que sus menores principales arbitrarios son todas positivas o iguales a cero).

7.11) $f(x,y,z) = -x^2 - 6y^2 - 3z^2 + 4xy + 2xz - 8yz$, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^3$. Es cóncava, debido a que $H = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 4 & -12 & -8 \\ 2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$ es una matriz negativo semidefinida (hállense sus valores característicos o verifíquese que sus menores principales arbitrarios son todas de signo intercalado o iguales a cero).

8. Diga para qué valores de a y b son cóncavas o convexas (sobre su dominio de definición) las siguientes funciones:

8.1) $f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 - az^2 + 4xy + 3yz$

La matriz hessiana $H = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & -2a^2 \end{pmatrix}$ es una matriz cuyos menores arbitrarios son: $m_1^{23} = 4$, $m_1^{13} = 6$, $m_1^{12} = -2a$, $m_2^1 = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2a \end{vmatrix}$, $m_2^2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2a \end{vmatrix}$, $m_2^1 = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$, $m_3 = |H|$.

La función no puede ser cóncava, pues para ello los menores de orden impar deberían ser negativos todos, y hay por lo menos dos que no lo son: $m_1^{23} = 4 > 0$ y $m_1^{13} = 6 > 0$.

Para que sea convexa, todos los menores arbitrarios deberían ser positivos o iguales a 0, y esto solo se cumple para $a \leq -9/4$.

8.2) $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + az^2 - 3bxy$.

La matriz hessiana $H = \begin{pmatrix} 2 & -3b & 0 \\ -3b & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}$ es una matriz cuyos menores arbitrarios son: $m_1^{23} = 2$, $m_1^{13} = 6$, $m_1^{12} = 2a$, $m_2^1 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2a \end{vmatrix}$, $m_2^2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2a \end{vmatrix}$, $m_2^3 = \begin{vmatrix} 2 & -3b \\ -3b & 6 \end{vmatrix}$, $m_3 = |H|$.

La función no puede ser cóncava, pues para ello los menores de orden impar deberían ser

negativos todos, y hay por lo menos dos que no lo son: $m_1^{23} = 2 > 0$ y $m_1^{13} = 6 > 0$.
Para que sea convexa, todos los menores arbitrarios deberían ser positivos o iguales a 0, y esto solo se cumple para $a \geq 0 \wedge 4a - 3b^2 \geq 0 \wedge -\sqrt{4/3} \leq b \leq \sqrt{4/3}$.

9. Determine el mayor conjunto S sobre el cual la función f sea convexa.
9.1) $f(x, y, z) = x^2y^2 + 4x^2$.
La matriz hessiana $H = \begin{pmatrix} 2y^2+8 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}$ es una matriz cuyos menores arbitrarios son: $m_1^2 = 2y^2 + 8$, $m_1^1 = 2x^2$, $m_2 = |H| = 4x^2(4 - 3y^2)$.
Para que sea convexa, todos los menores arbitrarios deberían ser positivos o iguales a 0. Los menores de orden 1 siempre lo son, pero el menor de orden 2 solo es positivo o igual a cero para $\dfrac{-2}{\sqrt{3}} \leq y \leq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Es decir, $f(x, y, x)$ es convexa sobre

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{-2}{\sqrt{3}} \leq y \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\}$$

9.2) $f(x, y) = \sqrt{2x + y}$.
9.3) $f(x, y) = x^3 - xy + 3y^3 + 5$.

Ejercicios adicionales no evaluables en calificadas.

1. El problema de la maximización del beneficio puede expresarse de la siguiente manera,

$$\text{máx } \Pi = \sum_{i=1}^{n} p_i y_i = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{y}$$
$$y \in Y.$$

En este caso, se incorpora en el vector y tanto los insumos como los productos, y en el vector p, tanto el precio de los bienes fabricados, como el de los insumos. El conjunto Y se conoce como conjunto de producción. Demuestre que la función de beneficios Π es convexa en precios.

Supongamos que $\boldsymbol{y}$ maximiza los beneficios a los precios $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{y}'$ los maximiza a los precios $\boldsymbol{p}'$. En ese caso,

$$\Pi(\boldsymbol{p}'') = \boldsymbol{p}''\boldsymbol{y}'' = (t\boldsymbol{p} + (1-t)\boldsymbol{p}')\boldsymbol{y}'' = t\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}'' + (1-t)\boldsymbol{p}'\boldsymbol{y}''.$$

Pero, de acuerdo con la definición de la función de beneficios,

$$t\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}'' \leq t\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}$$
$$(1-t)\boldsymbol{p}'\boldsymbol{y}'' \leq (1-t)\boldsymbol{p}'\boldsymbol{y}'.$$

Sumando estas expresiones, se concluye que

$$\Pi(\boldsymbol{p}'') \leq t\Pi(\boldsymbol{p}) + (1-t)\Pi(\boldsymbol{p}').$$

Así, si un precio fluctúa con probabilidad q tomando un valor p_1, y con probabilidad $1-q$ tomando un valor p_2, ¿es beneficioso para la empresa fijar el precio a $\overline{p} = qp_1 + (1-q)p_2$? Dada la convexidad de Π,

$$q\Pi(p_1) + (1-q)\Pi(p_2) \geq \Pi(qp_1 + (1-q)p_2) = \Pi(\overline{p}).$$

Por ende, la empresa pierde con esa política de estabilización de precios.

2. Plantee el problema de minimización del gasto y pruebe que la función de gasto $e(p, \overline{u})$ es cóncava en p. *Sugerencia: no intente obtener una expresión analítica para* e.

3. Sean $x_1, ..., x_n > 0$. Pruebe que

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=}^{n} x_i.$$

Sugerencia: use la concavidad de la función logaritmo neperiano y luego, aplique la desigualdad de Jensen.

Definimos $\theta_i = 1/n$ para todo i. Ciertamente $\sum_{i=1}^n \theta_i = 1$. Así, como ln es cóncava

$$\sum_{i=1}^n \theta_i \ln(x_i) \leq \ln\left(\sum_{i=1}^n \theta_i x_i\right)$$

o sea,

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n \ln(x_i)\right) \leq \ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}\right).$$

Pero recordando que $\ln(\prod_{i=1}^n x_i) = \sum_{i=1}^n \ln(x_i)$ (logaritmo del producto es la suma de logaritmos), y el hecho que $a \ln x = \ln x^a$, tenemos

$$\ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} \leq \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=}^n x_i\right).$$

Finalmente, como $\exp(\cdot)$ es creciente, aplicando en ambos lados esta función, se concluye que

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=}^n x_i.$$

4. Demuestre que, si $f(x)$ y $g(x)$ son convexas,

$$\phi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

es convexa. Luego, análogamente, demuestre que, si $f(x)$ y $g(x)$ son cóncavas,

$$\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

es cóncava.

Sea $\theta \in [0,1]$, $x, y \in S$. Entonces, como f y g son convexas,

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$$
$$g(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta g(x) + (1-\theta)g(y).$$

Luego

$$
\begin{aligned}
\phi(\theta x + (1-\theta)y) &\leq \text{máx}\{f(\theta x + (1-\theta)y), g(\theta x + (1-\theta)y)\} \\
&\leq \text{máx}\{\theta f(x) + (1-\theta)f(y), \theta g(x) + (1-\theta)g(y)\} \\
&\leq \theta\, \text{máx}\{f(x), g(x)\} + (1-\theta)\, \text{máx}\{f(y), g(y)\} \\
&= \theta\phi(x) + (1-\theta)\phi(y).
\end{aligned}
$$

Es análogo para el caso de la función ψ.