PUCP

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES

MATEMÁTICAS PARA ECONOMISTAS IV

PRÁCTICA DIRIGIDA 2

PROFESOR: JORGE R. CHÁVEZ

JEFES DE PRÁCTICA: JOAQUÍN RIVADENERYA & MARCELO GALLARDO

SEMESTRE 2022-2

FECHA 13-09-2022

Relaciones de preferencias

1. Sea $P = (1,1)$. Trace para cada relación de preferencia, representada a través de la función de utilidad U, los conjuntos I_P y $\overline{C}_P$. Luego, determine si $\preceq$ es convexa.

1.1) $U(x,y) = \text{mín}\{x,y\}$.

1.2) $U(x,y) = xy$.

1.3) $U(x,y) = x + y$.

2. Provea una ejemplo de relación de preferencia que no es continua pero que sí es racional.

Funciones convexas y cóncavas

3. Analice la convexidad o concavidad de las siguientes funciones sobre su dominio de definición. *Sugerencia: use los teoremas de aritmética y composición de funciones convexas y cóncavas.*

3.1) $f(x_1,x_2) = \ln(x_1 + x_2)$.

3.2) $f(x_1,x_2) = \sqrt{x_1 + x_2}$.

3.3) $f(x_1,x_2,x_3) = \exp(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 5)$.

4. Pruebe usando la definición que la función:

4.1) $\dfrac{1}{x}, x \in \mathbb{R}_{++}$ es estrictamente convexa.

4.2) $\sqrt{x}, x \in \mathbb{R}_{+}$ es estrictamente cóncava.

5. Analice si la función norma $f(x) = ||x||$ es estrictamente convexa, para $x \in \mathbb{R}^n$.

6. Utilizando argumentos de epígrafo o hipógrafo, analice la convexidad o concavidad de la función:

6.1) $f(x) = -x^2$.

6.2) $f(x) = x^3$.

Funciones convexas y cóncavas diferenciables

7. Usando criterios de diferenciabilidad, analice la convexidad o concavidad de las siguientes funciones. *Sugerencia: calcule la matriz Hessiana en cada caso.*

7.1) $f(x) = x \ln x$, $\mathrm{Dom}(f) = (0, +\infty)$.

7.2) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2,\ \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2_{++}$.

7.3) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2,\ \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$.

7.4) $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 + x_2^2},\ \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$.

7.5) $f(x_1, x_2) = \ln(x_1 x_2),\ \mathrm{Dom}(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ x_2 x_1 > 0\}$.

7.6) $f(x, y, z) = \ln(x + y)$, $\mathrm{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x + y > 0\}$.

7.7) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 5)$, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$.

7.8) $f(x, y) = \sqrt{x + y}$, $\mathrm{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x + y \geq 0\}$.

7.9) $f(x, y) = x + y - e^x - e^y$, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$.

7.10) $f(x, y, z) = x^2 + 12y^2 + 4z^2 - 6xy - 2xz + 12yz$, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^3$.

7.11) $f(x, y, z) = -x^2 - 6y^2 - 3z^2 + 4xy + 2xz - 8yz$, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^3$.

8. Diga para qué valores de a y b son cóncavas o convexas (sobre su dominio de definición) las siguientes funciones:

8.1) $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 - az^2 + 4xy + 3yz$

8.2) $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + az^2 - 3bxy$.

9. Determine el mayor conjunto S sobre el cual la función f sea convexa.

9.1) $f(x, y, z) = x^2 y^2 + 4x^2$.

9.2) $f(x, y) = \sqrt{2x + y}$.

9.3) $f(x, y) = x^3 - xy + 3y^3 + 5$.

Ejercicios adicionales no evaluables en calificadas.

1. El problema de la maximización del beneficio puede expresarse de la siguiente manera,

$$\text{máx } \Pi = \sum_{i=1}^{n} p_i y_i = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{y}$$
$$y \in Y$$

En este caso, se incorpora en el vector y tanto los insumos como los productos, y en el vector p, tanto el precio de los bienes fabricados, como el de los insumos. El conjunto Y se conoce como conjunto de producción. Demuestre que la función de beneficios Π es convexa en precios.

2. Plantee el problema de minimización del gasto y pruebe que la función de gasto $e(p, \overline{u})$ es cóncava en p. *Sugerencia: no intente obtener una expresión analítica para e.*

3. Sean $x_1, ..., x_n > 0$. Pruebe que

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=}^{n} x_i.$$

Sugerencia: use la concavidad de la función logaritmo neperiano y luego, aplique la desigualdad de Jensen.

4. Demuestre que, si $f(x)$ y $g(x)$ son convexas,

$$\phi(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}$$

es convexa. Luego, análogamente, demuestre que, si $f(x)$ y $g(x)$ son cóncavas,

$$\psi(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$$

es cóncava.