PUCP

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES

MATEMÁTICAS PARA ECONOMISTAS IV

PRÁCTICA DIRIGIDA 1

PROFESOR: JORGE R. CHÁVEZ

JEFES DE PRÁCTICA: JOAQUÍN RIVADENERYA & MARCELO GALLARDO

SEMESTRE 2022-2

FECHA 23-08-2022

Elementos de Topología en $\mathbb{R}^n$

1. Calcule la norma de los siguientes vectores:

1.1) $\overline{x} = (2, -3)$

1.2) $\overline{y} = (2, 4, 1)$

1.3) $\overline{z} = (4, 5, -6)$

1.4) $\overline{w} = (6, -0, 3)$

1.5) $\overline{y} + 2\overline{z}$

1.6) $3\overline{y} - \overline{w}$.

En este contexto, consideramos la norma Euclidiana, definida de la siguiente manera, dado $\overline{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$||\overline{x}||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Así,

1.1) $||\overline{x}||_2 = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$.

1.2) $||\overline{y}||_2 = \sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{21}$.

1.3) $||\overline{z}||_2 = \sqrt{4^2 + 5^2 + (-6)^2} = \sqrt{77}$.

1.4) $||\overline{w}||_2 = 3\sqrt{5}$.

1.5) $||\overline{y} + 2\overline{z}||_2 = ||(10, 14, 11)||_2 = \sqrt{417}$.

1.6) $||3\overline{y} - \overline{w}||_2 = ||(0, 12, 0)||_2 = 12$.

Note que para sumar o restar vectores, tienen que tener la misma dimensión, y en segundo lugar, se hace componente por componente.

2. Como sabemos, una bola abierta centrada en x_0 y de radio $r > 0$, en $\mathbb{R}^n$, es un conjunto de la forma

$$\mathcal{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ ||x - x_0|| < r\}.$$

Sean $x_0 = (0, 0)$ y $r = 1$.

2.1) Verifique si los puntos $P = (1, 1)$ y $Q = (-1, 0.5)$ pertenecen a $\mathcal{B}(x_0, r)$.

2.2) ¿Cuál de los dos puntos P o Q está más cerca del centro de la bola?

2.3) Grafique el conjunto $\mathbb{R}^n \backslash \mathcal{B}(x_0, r)$. Luego, caracterice cualquier punto de este conjunto.

Nuevamente trabajamos con la norma Euclidiana.

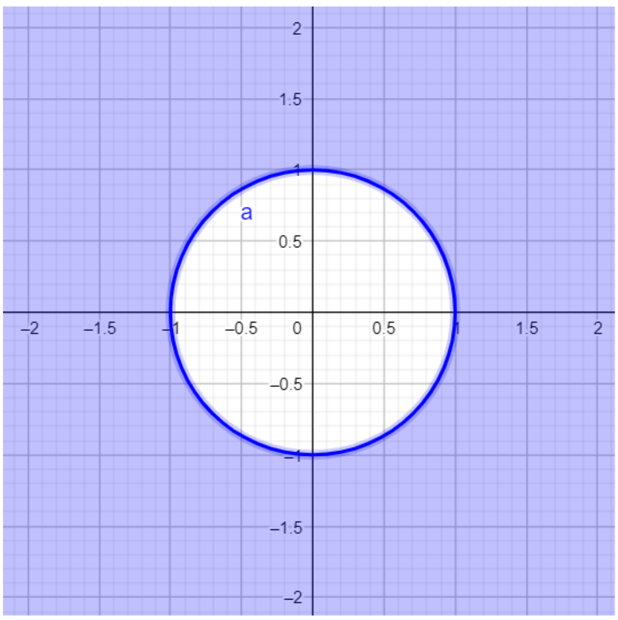
2.1) Basta con verificar si $||P - x_0|| = ||(1, 1) - (0, 0)|| < 1$. Notamos que no es el caso pues $||P - x_0|| = ||P|| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} > 1$. El resultado es análogo con Q pues $||Q|| = \sqrt{1.25} > 1$.

2.2) Podemos discernir cual de los puntos está más cerca del centro de la bola (que coincide con el origen de coordenadas en $\mathbb{R}^2$) comparando $||P - x_0||$ y $||Q - x_0||$. En este caso,

$$||Q - x_0|| = \sqrt{1.25} < ||P - x_0|| = \sqrt{2}$$

por lo que Q está más cerca al centro de la bola.

2.3) Finalmente, el conjunto $\mathbb{R}^2 / \mathcal{B}(x_0, r)$ es simplemente el plano sin considerar la bola abierta de radio 1 centrada en el origen. Dicho conjunto es cerrado pues es el complemento de un conjunto abierto (la bola $\mathcal{B}(x_0, r)$). Este conjunto cerrado se puede definir como $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq 1\}$ y su gráfica es:



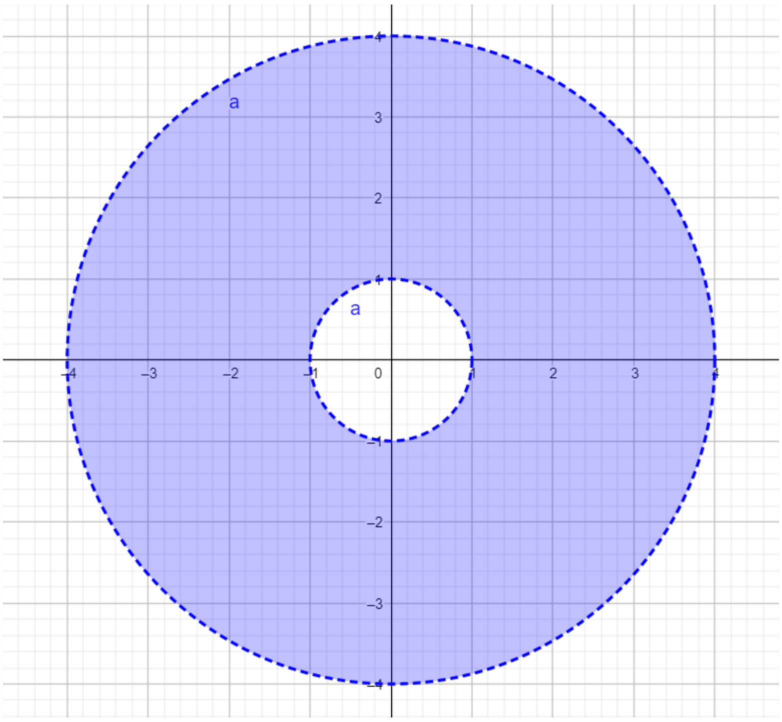
3. Identifique si los siguientes conjuntos son cerrados, abiertos o ninguno de los dos. Luego, provea el borde de cada conjunto y determine gráficamente si es un conjunto acotado.

3.1) $\Omega_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 < x_1^2 + x_2^2 < 16\}$

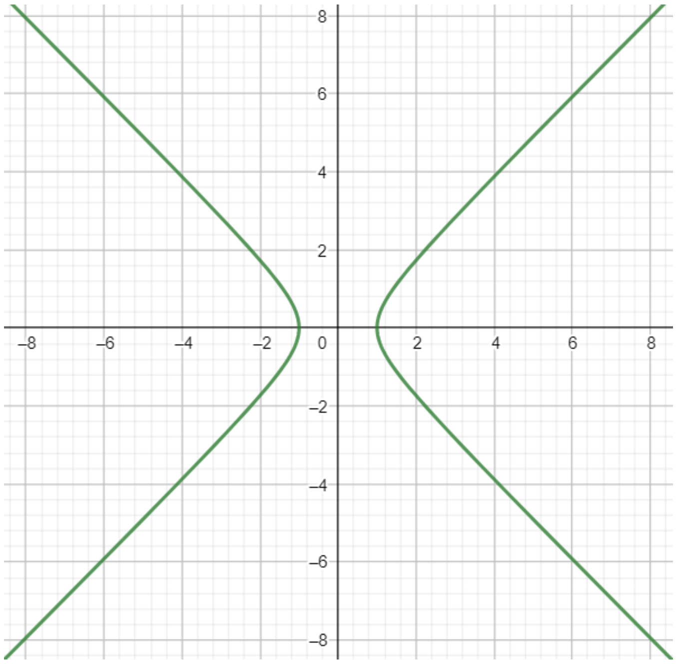
3.2) $\Omega_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 - x_2^2 = 1\}$

3.3) $\Omega_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 \leq 1\}$.

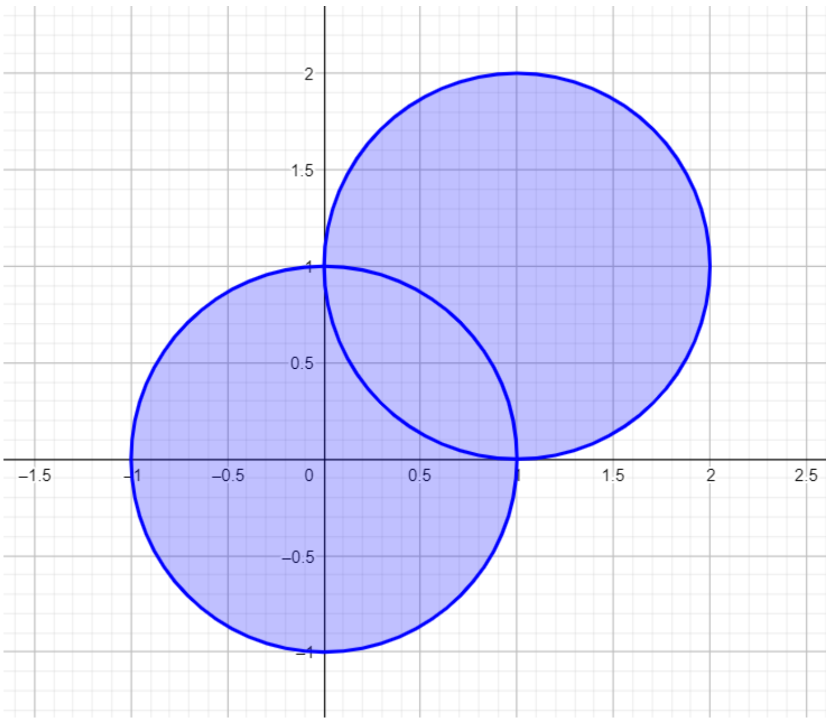
3.1) Es abierto *porque no contiene a su borde geométrico*. Formalmente, $\forall \ x = (x_1, x_2) \in \Omega_1$, $\exists r > 0$ tal que $B(x, r) \subset \Omega_1$. El borde está conformado por $\partial\Omega_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} : x_1^2 + x_2^2 = 1 \vee x_1^2 + x_2^2 = 16\}$. Es acotado porque existe una bola de radio finito que lo puede contener (grafíquela).



3.2) Es cerrado porque contiene a (todo) su borde geométrico. El borde está conformado por el mismo Ω_2, es decir $\partial\Omega_2 = \Omega_2$. Es no acotado porque no existe una bola de radio finito que lo pueda contener.



3.3) Es cerrado porque contiene a su borde geométrico. El borde de Ω_3 está corresponde a los arcos de circunferencia sin contar la porción de la intersección. Es acotado porque existe una bola de radio finito que lo puede contener.



Introducción al análisis convexo

4. Sean $\overline{x} = (2, 3)$ e $\overline{y} = (4, 10)$ dos puntos de $\mathbb{R}^2$.

4.1) ¿Es el punto $(3, 5)$ combinación convexa de $\overline{x}$ e $\overline{y}$?

4.2) Proporcione un punto de $\mathbb{R}^2$ que no sea combinación convexa de $\bar{x}$ e $\bar{y}$.

4.3) Exprese $(7/2, 33/4)$ como combinación convexa de $\overline{x}$ e $\overline{y}$.

4.1) ¿Es el punto $(3, 5)$ combinación convexa de $\overline{x}$ e $\overline{y}$? Equivale a responder a la pregunta ¿puede $(3, 5)$ expresarse como $\lambda(2, 3) + (1 - \lambda)(4, 10)$ para algún $\lambda \in [0, 1]$? Veamos:

$$
\begin{aligned}
(3, 5) =& \lambda(2, 3) + (1 - \lambda)(4, 10) \\
(3, 5) =& (2\lambda, 3\lambda) + (4(1 - \lambda), 10(1 - \lambda)) \\
(3, 5) =& (2\lambda + 4(1 - \lambda), 3\lambda + 10(1 - \lambda)) \\
(3, 5) =& (4 - 2\lambda, 10 - 7\lambda).
\end{aligned}
$$

Entonces, tenemos:

$$
\begin{gathered}
4 - 2\lambda = 3 \to \lambda = 1/2 \\
10 - 7\lambda = 5 \to \lambda = 5/7.
\end{gathered}
$$

Lo cual representa una contradicción. Es decir, no existe $\lambda \in [0, 1]$ tal que $(3, 5)$ pueda expresarse como $\lambda(2, 3) + (1 - \lambda)(4, 10)$. Por lo tanto $(3, 5)$ no es combinación convexa de $\bar{x}$ e $\bar{y}$.

4.2) Un punto que no es combinación convexa es el origen de coordenadas, $(0, 0)$. Otro ejemplo es el punto (3,5) del ítem anterior.

4.3) Tome $\lambda = 1/4$.

5. En base a argumentos geométricos, determine si los siguientes conjuntos son convexos o no:

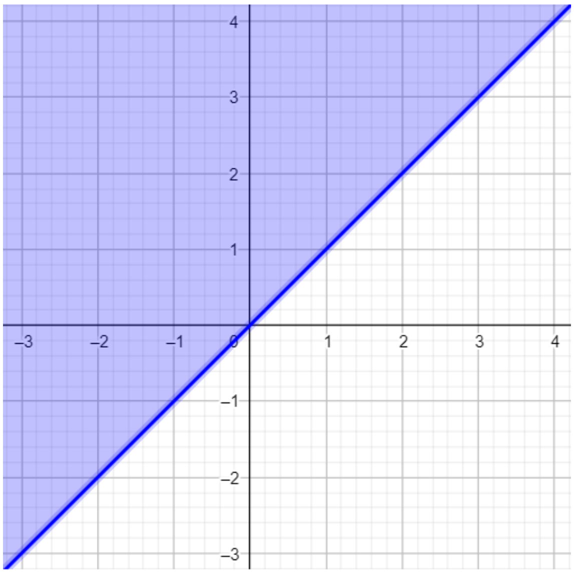
5.1) $\Omega_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq x_1\}$.

5.2) $\Omega_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq \ln(x_1)\}$.

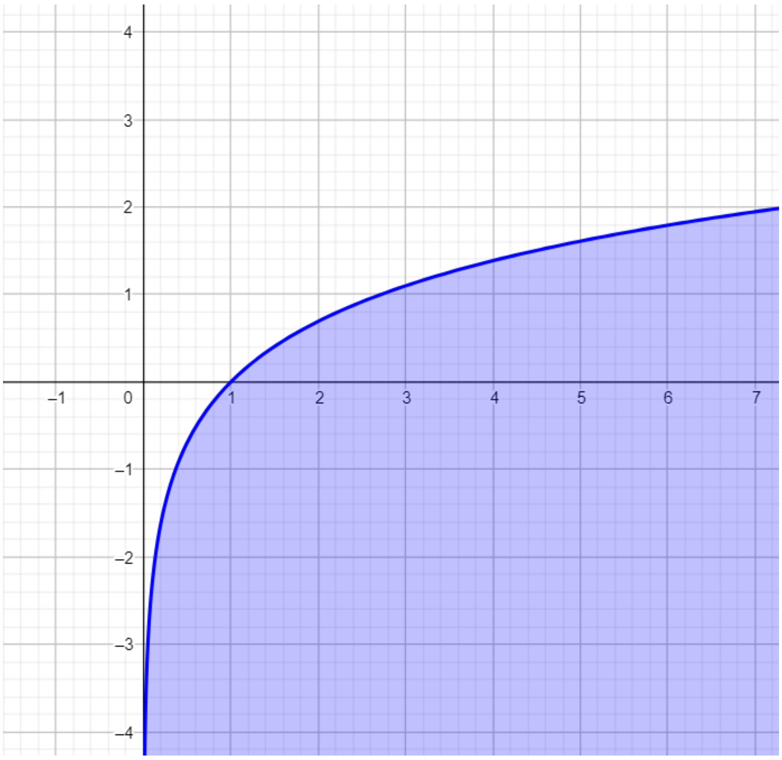
5.3) $\Omega_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2/9 + x_2^2/9 \leq 1\}$.

5.4) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 2\}$.

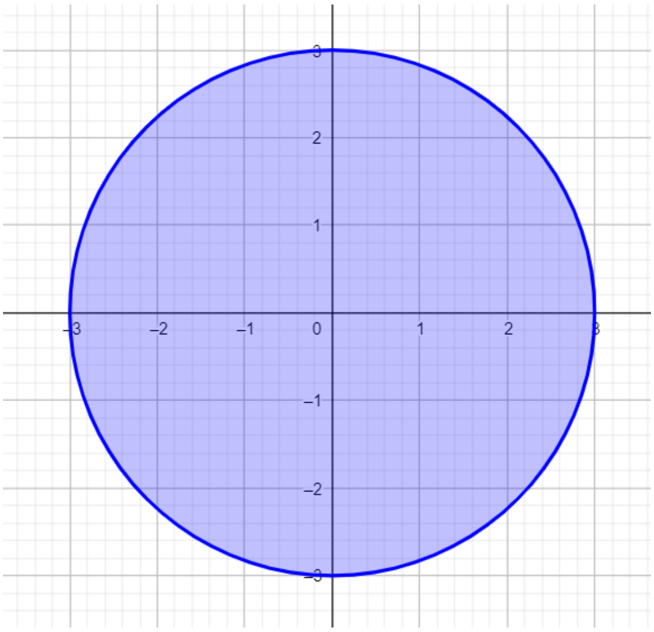
5.1) $\Omega_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq x_1\}$ es convexo porque cualquier combinación convexa de dos puntos cualesquiera dentro del conjunto estará también en el conjunto.



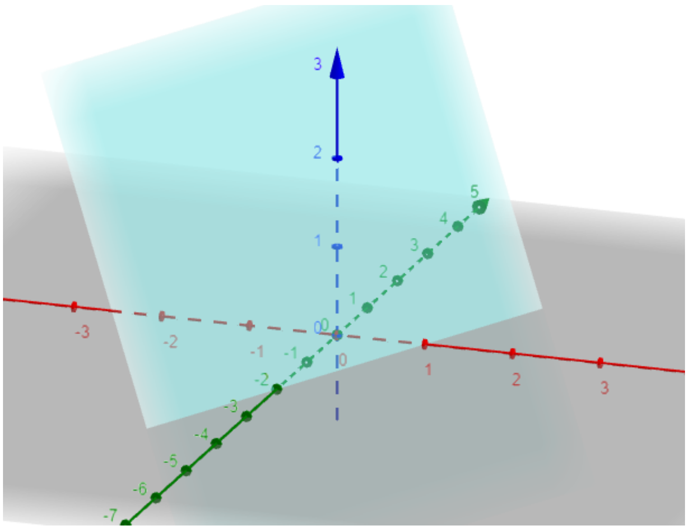
5.2) $\Omega_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq \ln(x_1)\}$ es convexo porque cualquier combinación convexa de dos puntos cualesquiera dentro del conjunto estará también en el conjunto.



5.3) $\Omega_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2/9 + x_2^2/9 \leq 1\}$ es convexo porque cualquier combinación convexa de dos puntos cualesquiera dentro del conjunto estará también en el conjunto.



5.4) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 2\}$ es convexo porque cualquier combinación convexa de dos puntos cualesquiera dentro del conjunto estará también en el conjunto. Gráficamente, es el área por debajo del plano:



6. ¿Es la unión, diferencia e intersección de conjuntos convexos un conjunto convexo?
La unión de conjuntos convexos no es un conjunto convexo necesariamente. Se puede ver contraejemplos gráficamente. Tome dos intervalos de la recta disjuntos, $[0, 1]$ y $[2, 3]$. Ambos son convexos pero su unión no pues $x = 1.5$ que es combinación convexa no pertenece a la unión.
La diferencia de conjuntos convexos no es un conjunto convexo necesariamente. Se puede

ver contraejemplos gráficamente. Por ejemplo, $\mathcal{B}((0,0),4) - \mathcal{B}((0,0),1)$. Sin embargo, la intersección de conjuntos convexos sí es un conjunto convexo siempre. Esto se prueba de la siguiente manera (para el caso finita). Sean S_i convexos. Dados $x, y \in \cap_{i=1}^n S_i$ y $\theta \in [0,1]$, $\theta x + (1-\theta)y \in S_i$ para todo i (pues los S_i son convexos y $x, y \in S_i$ para todo i). Luego, $\theta \in [0,1]$, $\theta x + (1-\theta)y \in \cap_{i=1}^n S_i$.

7. Por definición, pruebe que el conjunto S es convexo

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1 \leq 3,\ 1 \leq x_2 \leq 4\}.$$

Por definición, un conjunto S es convexo si y solo si:

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in S, \forall \lambda \in [0,1] : \lambda \bar{x} + (1-\lambda)\bar{y} \in S.$$

Entonces, comprobemos que la definición se cumple siempre para nuestro conjunto S.

$$\bar{x} = (x_1, x_2) \in S \rightarrow 1 \leq x_1 \leq 3, 1 \leq x_2 \leq 4 \tag{1}$$

$$\bar{y} = (y_1, y_2) \in S \rightarrow 1 \leq y_1 \leq 3, 1 \leq y_2 \leq 4. \tag{2}$$

Multipliquemos (1) por λ y (2) por $(1-\lambda)$. Entonces:

$$\lambda \leq \lambda x_1 \leq 3\lambda$$
$$1-\lambda \leq (1-\lambda)y_1 \leq (1-\lambda)3$$
$$(+) 1 \leq \lambda x_1 + (1-\lambda)y_1 \leq 3.$$

Por otro lado,

$$\lambda \leq \lambda x_2 \leq 3\lambda$$
$$1-\lambda \leq (1-\lambda)x_2 \leq (1-\lambda)3$$
$$(+) 1 \leq \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2 \leq 3.$$

Juntando estos dos resultados, tenemos que

$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1, \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2) \in S$$

Es decir,

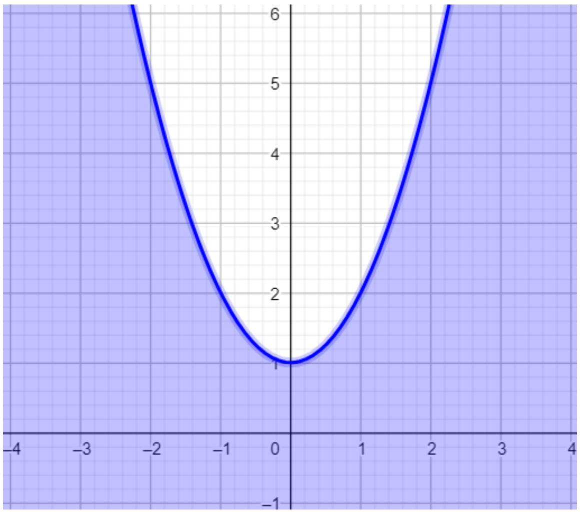
$$\lambda \bar{x} + (1-\lambda)\bar{y} \in S\ \forall\ \bar{x}, \bar{y} \in S, \forall \lambda \in [0,1].$$

Lo cual demuestra que S es un conjunto convexo.

8. Pruebe que el conjunto que se da a continuación no es convexo.

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq x_1^2 + 1\}.$$

El gráfico del conjunto es



Por definición, un conjunto S es convexo si y solo si:

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in S, \forall \lambda \in [0,1] : \lambda\bar{x} + (1-\lambda)\bar{y} \in S$$

Entonces, comprobemos que la definición NO se cumple siempre para nuestro conjunto S. Como contraejemplo, veamos que, dados $\bar{x} = (-1, 2)$ y $\bar{y} = (1, 2)$, y dado $\lambda = 0.5$, entonces $\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\bar{y} = (0, 2)$ no pertenece a S.

9. Sea $\overline{p} = (2, 3)$ un vector de precios e $I = 10$, el ingreso de un consumidor.

9.1) Grafique la región de presupuesto.

9.2) Proporcione dos canastas factibles.

9.3) Proporcione una canasta no factible.

9.4) Sin cambiar los precios, cómo podría mejorar el ingreso para que la canasta NO factible se convierta en factible. Realice el mismo ejercicio, pero ahora manteniendo fijo el ingreso.

9.1) La región de presupuesto está dada por

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / 2x_1 + 3x_2 \leq 10 \ , \ x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0\}.$$

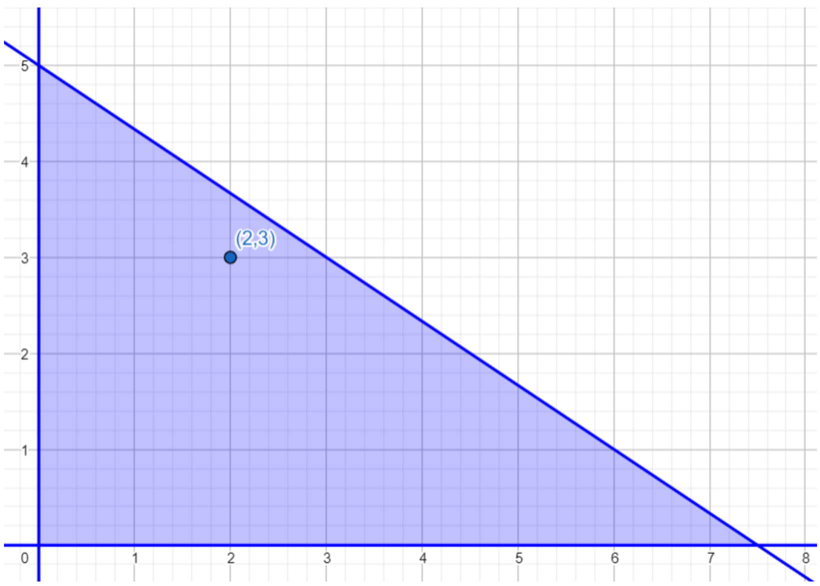
9.2) Por ejemplo, dos canastas factibles son $(1,1)$ y $(2,1)$. Se puede verificar que cumplen con $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2/2x_1+3x_2 \leq 10\ ,\ x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0\}$.

9.3) Una canasta factible es una fuera del conjunto presupuestario, por ejemplo $(2,3)$.

9.4) Si $I = 15$, entonces el conjunto queda $(1,1)$ y $(2,1)$. Se puede verificar que cumplen con

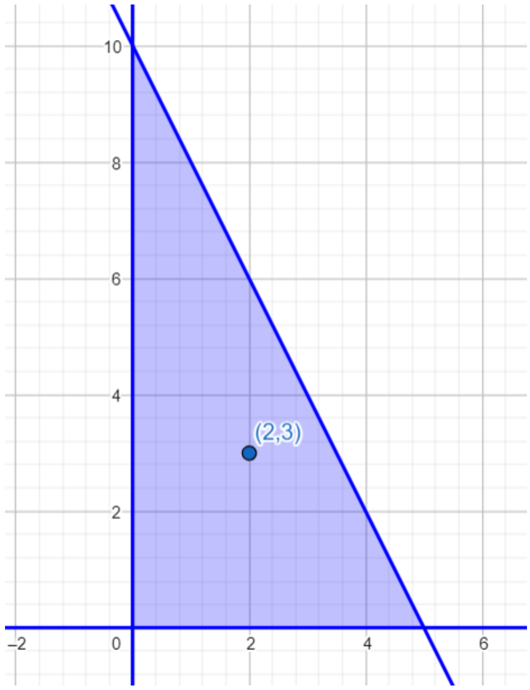
$$\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2/2x_1+3x_2 \leq 10\ ,\ x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0\}$$

.



Si mantenemos el ingreso en 10, pero el precio del bien 2 baja: $p_2 = 1$, entonces

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / 2x_1 + x_2 \leq 10 \ , \ x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0\}.$$



Relaciones de preferencias

10. Si $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_1 x_2$ determine si $x \preceq y$, donde $x = (1, 2)$ y $y = (2, 1)$.

Si $U(\cdot)$ representa la relación de preferencias y $x \preceq y$, entonces $U(x) \leq U(y)$. O sea,

$$U(1, 2) = \sqrt{1} + 1 \cdot 2 \leq U(2, 1) = \sqrt{2} + 2 \cdot 1.$$

Como esta desigualdad se da, efectivamente $x \preceq y$. Comentarios sobre las preferencias y U: la estructura de U (valor más x_1), interacción entre x_1 y x_2 y componente estrictamente cóncavo $\sqrt{x_1}$.

11. Si $(1, 1) \preceq (2, 0)$, ¿la función $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$ representa correctamente dicha relación de preferencia?

En vista de que $U(1, 1) = 1$ mientras que $U(2, 0) = 0$, la función $U(\cdot)$ NO representa la relación de preferencia.

12. A continuación, se definen relaciones binarias en $\mathbb{R}^2$. En cada caso, analice si se trata de una relación de preferencias racional, esboce una curva de indiferencia que satisfaga las relaciones de preferencias y analice si las relaciones de preferencias halladas tienen la propiedad de convexidad.

12.1) $(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2$.

12.2) $(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$.

12.3) $(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 x_2 \leq y_1 y_2$.

12.4) $(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2) \Leftrightarrow \min\{x_1, x_2\} \leq \min\{y_1, y_2\}$.

12.5) $\overline{x} = (x_1, x_2) \preceq \overline{y} = (y_1, y_2)$ si y solamente si se cumple: $(x_1 < y_1)$, o bien, $(x_1 = y_1$ y $x_2 < y_2)$. Esto implica que $x \sim y$ si y solamente si $x = y$.

12.6) Dado $x_0 = (x_{10}, x_{20})$, $x = (x_1, x_2) \preceq y = (y_1, y_2)$ si y solamente si $||x - x_0||_2 \geq ||y - x_0||_2$. Recuerde que $||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$.

Para verificar si las relaciones binarias definidas previamente se tratan de una relación de preferencia, debemos verificar si son completas y transitivas. Para ello, denotamos en todo momento $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ y $z = (z_1, z_2)$. Más aún, definimos la relación conocida como indiferencia, x es indiferente a y:

$$x \sim y \Leftrightarrow [x \succeq y] \wedge [y \succeq x],$$

y el siguiente conjunto de consumo (el conjunto Walrasiano). Dados $I, p_1, p_2 > 0$

$$B(p, I) = B((p_1, p_2), I) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq I\}.$$

Si la preferencia es convexa, entonces el conjunto de decisiones óptimas del consumidor es un conjunto convexo. Es decir, si la canasta $x \in \mathbb{R}^n$ es por lo menos tan buena como la canasta $y \in \mathbb{R}^n$, entonces, toda combinación convexa de ellas es una canasta al menos tan buena como y. Formalmente: dados $x, y \in X$

$$x \succeq y \implies \lambda x + (1 - \lambda) y \succeq y, \ \forall \ \lambda \in [0, 1].$$

Estas definiciones y notaciones serán útiles para los desarrollos posteriores. Note además que $X \subset \mathbb{R}^2_+$, o sea que, para que X sea un conjunto de consumo, si $x \in X$, las entradas de los elementos de x deben ser no negativas.

12.1) La relación binaria definida por $(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2$ no es completa pero sí es transitiva. En efecto, considérese por ejemplo $X = B((1, 1), 2)$, $x = (1, 0)$ y $y = (0, 1)$[1]. No se cumple que $x_1 \leq y_1$ y simultáneamente $x_2 \leq y_2$ (o sea,

[1] Ciertamente $x, y \in B((1, 1), 5)$

$\neg(x \preceq y)$) y tampoco se cumple que $y_1 \leq x_1$ y simultáneamente $y_2 \leq x_2$ (o sea, $\neg(y \preceq x)$). Por ende, como hemos encontrado un par elementos $x, y \in X = B((1,1),5)$ que no pueden ser comparados[2], i.e., $\preceq$ no es completa. Veamos ahora que $\preceq$ es transitiva, esto es, dados $x, y, z \in X$, si $x \preceq y$ y $y \preceq z$, entonces $x \preceq z$. Si $x \preceq y$, $x_1 \leq y_1$ y $x_2 \leq y_2$. Luego, si $y \preceq z$, $y_1 \leq z_1$ y $y_2 \leq z_2$. Por la transitividad en $\mathbb{R}^+$, $x_1 \leq y_1 \leq z_1$ y $x_2 \leq y_2 \leq z_2$. En particular, $x_1 \leq z_1 \wedge x_2 \leq z_2$. O sea, $x \preceq z$.

Convexidad: Si $x \preceq y$

$$\theta x + (1-\theta) y = \begin{pmatrix} \theta x_1 + (1-\theta) y_1 \\ \theta x_2 + (1-\theta) y_2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

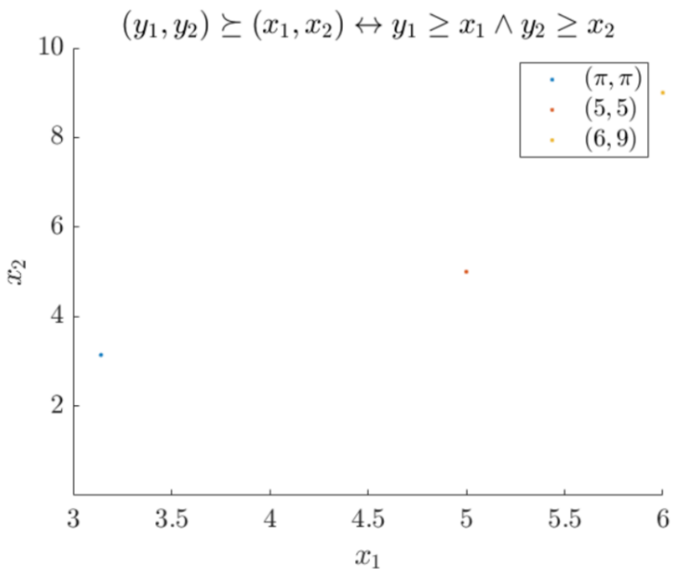
Luego, verificamos que

$$x_1 + (1-\theta)x_1 \leq \theta x_1 + (1-\theta) y_1$$
$$x_2 + (1-\theta)x_2 \leq \theta x_2 + (1-\theta) y_2.$$

Así,

$$x \preceq \theta x + (1-\theta) y,$$

lo cual implica que $\preceq$ es convexa.



12.2) Sea ahora la relación binaria definida por $(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$. Veamos que esta relación es completa y transitiva. Primero, recordemos que tomamos

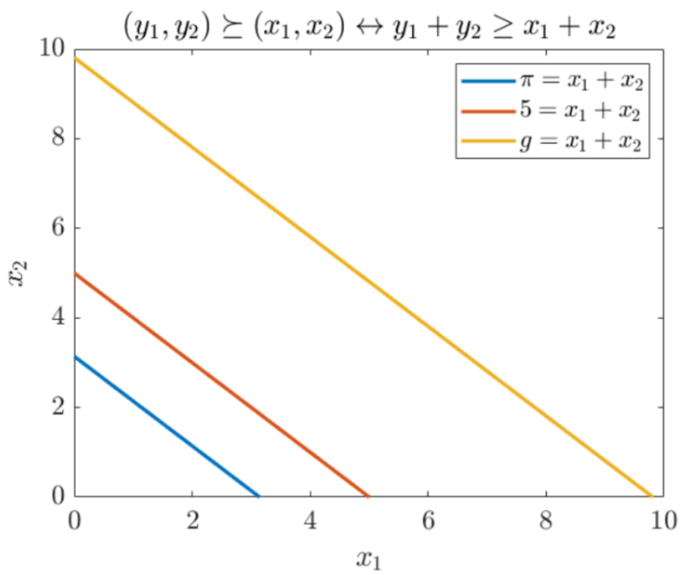
[2] O sea, no se tiene que $x \preceq y$ ni $y \preceq x$.

$x, y \in \mathbb{R}^2_{++}$, tales que $||x||, ||y|| < \infty$. Esto nos asegura que $x, y \in X$, un conjunto de consumo arbitrario. Luego, denotemos $\alpha = x_1 + x_2$ y $\beta = y_1 + y_2$. Como $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ y $(\mathbb{R}, \leq)$ es un conjunto ordenado (con la relación de orden $\leq$), se tiene que $\alpha \leq \beta$ o bien $\beta \leq \alpha$. Por ende, o $x \preceq y$, o bien $y \preceq x$. En cualquier caso, es posible comparar dos elementos de X, i.e., $\preceq$ es completa. Veamos ahora que $\preceq$ también es transitiva. Sean entonces $x, y, z \in X$ con $x \preceq y$ y $y \preceq z$. Sea $\gamma = z_1 + z_2$. Entonces, $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \gamma$. Luego, nuevamente usando la propiedad de transitividad de la relación de orden $\leq$ en $\mathbb{R}$, concluimos directamente que $\alpha \leq \gamma$, i.e., $x \preceq z$. Por la relación de orden $\leq$ que se hereda en $g(X) \subset \mathbb{R}^+$, podemos concluir que son completas, $x_1 + x_2$ siempre provee un número real.

Convexidad: Si $x \preceq y \Leftrightarrow x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$. Luego, usando la definición de $\theta x + (1-\theta)y$ dada en (3)

$$\begin{aligned}
\theta x_1 + (1-\theta)y_1 + \theta x_2 + (1-\theta)y_2 &= \theta(x_1 + x_2) + (1-\theta)(y_1 + y_2) \\
&\geq \theta(x_1 + x_2) + (1-\theta)(x_1 + x_2) \\
&= x_1 + x_2.
\end{aligned}$$

Por ende, se cumple que $\preceq$ es convexa.



12.3) Luego, con respecto a la relación binaria definida por $(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 x_2 \leq y_1 y_2$. Veamos que se trata de una preferencia sobre un conjunto de consumo, i.e., $X \subset \mathbb{R}^2_+$.

Primero, la relación es completa pues, $x_1x_2 = \alpha \in \mathbb{R}_+$ y $y_1y_2 = \beta \in \mathbb{R}_+$. Nuevamente, teniendo en cuenta la relación de orden en $\mathbb{R}$, que es ciertamente completa, concluimos que, o $\alpha \leq \beta$ o bien $\beta \leq \alpha$. En cualquier caso, es siempre posible rankear x y y, i.e., $x \preceq y$ o bien $y \preceq x$, o bien suceden ambos casos y $x \sim y$. Luego, la transitividad es consecuencia de la transitividad de los números reales. En efecto, $x_1x_2 \leq y_1y_2$ y $y_1y_2 \leq z_1z_2$, $x_1x_2 \leq z_1z_2$. Así, si $x \preceq y$ y $y \preceq z$, entonces $x \preceq z$. Note que podemos definir $f(x_1, x_2) = x_1x_2$, con $f : X \to \mathbb{R}$ y, como $(f(X), \leq)$ hereda la relación de orden total de $\mathbb{R}$, se concluye directamente la completitud y transitividad de las preferencias.

Convexidad: sea $x \preceq y$, queremos $z = \theta x + (1-\theta)y \succeq x$. Definimos $c_x = x_1x_2$ y $c_y = y_1y_2$ y $c_z = z_1z_2$ con $z_1 = \theta x_1 + (1-\theta)y_1$, $z_2 = \theta x_2 + (1-\theta)y_2$. Entonces,

$$\begin{aligned}
c_z &= (\theta x_1 + (1-\theta)x_2)\left(\theta\frac{c_x}{x_1} + (1-\theta)\frac{c_y}{y_1}\right) \\
&= \theta^2 c_x + \theta(1-\theta)\frac{x_1}{y_1}c_y + \theta(1-\theta)\frac{y_1}{x_1}c_x + (1-\theta)^2 c_y \\
&\geq \left(\theta^2 + \theta(1-\theta)\left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{y_1}{x_1}\right) + (1-\theta)^2\right)c_x.
\end{aligned}$$

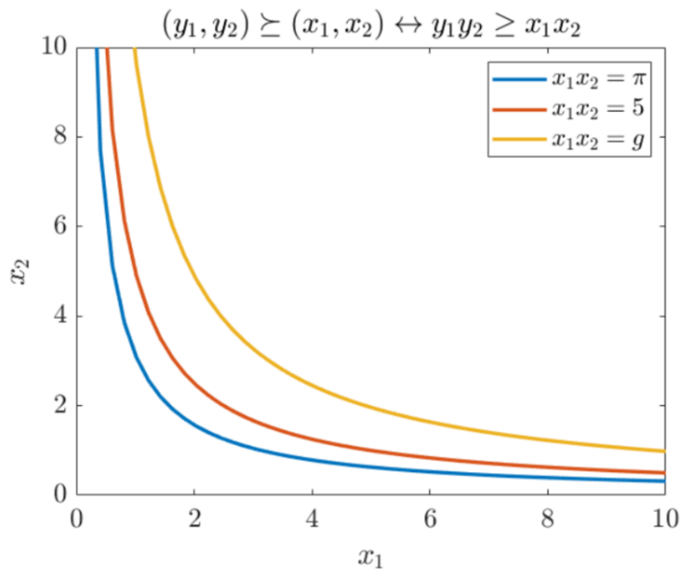
Luego, como $(a+b)^2 \geq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{a^2+b^2}{2} &\geq \sqrt{a^2b^2} \\
\frac{a^2+b^2}{ab} &\geq 2 \\
\frac{a}{b} + \frac{b}{a} &\geq 2.
\end{aligned}$$

Finalmente, el resultado previo,

$$\begin{aligned}
z_1z_2 &\geq (\theta^2 + 2\theta(1-\theta) + (1-\theta)^2)c_x \\
&= c_x \\
&= x_1x_2.
\end{aligned}$$

Con esto, concluimos lo solicitado.



12.4) Finalmente, consideremos la siguiente relación binaria,

$$(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2) \Leftrightarrow \text{mín}\left\{x_1, x_2\right\} \leq \text{mín}\left\{y_1, y_2\right\}.$$

Sean entonces

$$\alpha = \text{mín}\left\{x_1, x_2\right\}$$
$$\beta = \text{mín}\left\{y_1, y_2\right\}.$$

Luego, como $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, y $\leq$ es completa en $\mathbb{R}$, o bien $\alpha \leq \beta$, o bien $\beta \leq \alpha$ (o se cumplen ambas condiciones y $\alpha = \beta$). Con esto se prueba la completitud de $\preceq$. Luego, para la transitividad, si

$$\alpha = \text{mín}\left\{x_1, x_2\right\} \leq \text{mín}\left\{y_1, y_2\right\} = \beta$$

y

$$\beta = \text{mín}\left\{y_1, y_2\right\} \leq \text{mín}\left\{z_1, z_2\right\} = \gamma$$

como $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \leq \gamma$. O sea, si $x \preceq y$ y $y \preceq z$, entonces $x \preceq z$.

Convexidad: nuevamente, definimos $z = \theta x + (1 - \theta)y$,

$$\text{mín}\{z_1, z_2\} = \{\theta x_1 + (1 - \theta)y_1, \theta x_2 + (1 - \theta)y_2\}.$$

Luego, como $x \preceq y$, $\text{mín}\{x_1, x_2\} \leq \text{mín}\{y_1, y_2\}$

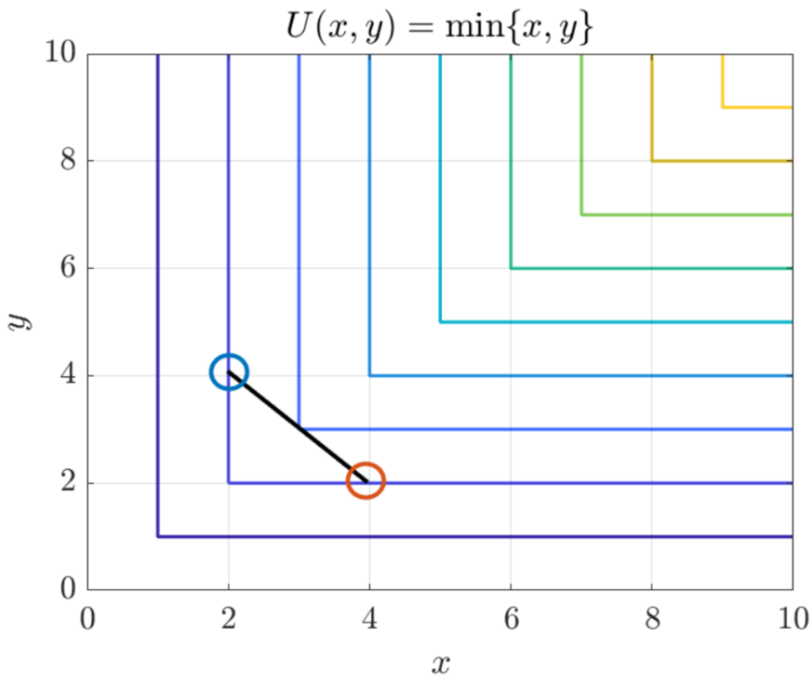
$$x_1 \leq \theta x_1 + (1 - \theta)y_1$$

y

$$x_2 \leq \theta x_2 + (1-\theta) y_2.$$

Así,

$$\text{mín}\{x_1, x_2\} \leq \text{mín}\{z_1, z_2\} \implies x \preceq z.$$



12.5) La preferencia lexicográfica (12.5) es racional pues, ciertamente es completa y, por otro lado, si $x \preceq y$ y $y \preceq z$, entonces $x \preceq z$. En efecto, si $x \preceq y$, $x_1 < y_1$ o bien $x_1 = y_1$ y $x_2 < y_2$. Luego, como $y \preceq z$, $y_1 \leq z_1$ o bien $y_1 = z_1$ y $y_2 < z_2$. En todos los casos (4), $x_1 < z_1$ o bien $x_1 = y_1$ y $x_2 < z_2$. También son convexas y esto es análogo al 12.1). Observe.

Convexidad Si $x \preceq y$, entonces para $\theta \in [0,1]$

$$x_1 = \theta x_1 + (1-\theta) x_1 \leq \theta x_1 + (1-\theta) y_1$$
$$x_2 = \theta x_2 + (1-\theta) x_2 \leq \theta x_2 + (1-\theta) y_2.$$

Así $x \preceq \theta x + (1-\theta) y$.

12.6) Finalmente, la última relación de preferencia descrita también es racional. Es completa pues $||x|| \in \mathbb{R}$. Luego, es transitiva pues

$$||z - x_0|| \leq ||y - x_0|| \leq ||x - x_0|| \implies ||z - x_0|| \leq ||x - x_0|| \implies x \preceq z.$$

Convexidad Si $x \preceq y$, entonces para $\theta \in [0, 1]$, usando la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} ||\theta x + (1-\theta)y - x_0|| &\leq ||\theta x - \theta x_0|| + ||\theta x_0 + (1-\theta)y - x_0|| \\ &= \theta ||x - x_0|| + (1-\theta)||y - x_0|| \\ &\leq ||x - x_0||. \end{aligned}$$

Así, $\preceq$ es también convexa.

En conclusión, las relaciones de preferencias son todas transitivas (salvo la 12.1) todas son completas también). Por otro lado,todas las preferencias son convexas. Esto se verifica rápidamente aplicando la definición.