PUCP
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES

MATEMÁTICAS PARA ECONOMISTAS
PRÁCTICA CALIFICADA 5
PROFESOR: Jorge R. Chávez
JEFES DE PRÁCTICA: Joaquin Rivadeneyra, Marcelo Gallardo
SEMESTRE: 2022-2
FECHA DE ENTREGA: 25/11/2022

1. En el modelo de Solow estudiado en clase, asuma una función de producción Cobb Douglas con $\beta = 1 - \alpha$. Derive detalladamente la ecuación fundamental del modelo y muestre **matemáticamente** que una alteración en los parámetros del modelo no cambia la naturaleza de la estabilidad del equilibrio. En particular, pruebe que este sigue siendo atractor. **(4 puntos)**

2. El modelo de Ramsey se plantea de la siguiente manera. La función de producción $y = f(k)$ depende solo del stock de capital k. f es creciente con rendimientos marginales decrecientes y el producto se compone de consumo c, inversión neta y reposición de capital que se deprecia a una tasa constante δ. Para planear la inversión de forma óptima las autoridades eligen una función de utilidad u estrictamente creciente y estrictamente cóncava. El problema de las autoridades es elegir la trayectoria óptima del capital que maximice la utilidad total descontada a la tasa ρ. Para esto, consideran un capital inicial k_0 y un capital final $k(T) = k_T$. **(8 puntos)**

2.1) Plantee el problema y obtenga la ecuación de Euler.

2.2) Considerando la función de utilidad

$$u(c) = \frac{1}{1-\theta}c^{1-\theta}, 0 < \theta < 1$$

obtenga el sistema

$$k' = f(k) - \delta k - c$$

$$c' = \frac{c}{\theta}(f'(k) - \delta - \rho).$$

2.3) Pruebe que el sistema tiene tres puntos de equilibrio (k^*, c^*), donde uno de ellos es no nulo. Utilizando el teorema de Hartman Grobman, determine la estabilidad del equilibrio no nulo.

2.4) Halle y grafique las isoclinas del sistema. Elabore el diagrama de fases.

3. Una empresa desea establecer su plan de inversión con el fin de maximizar sus beneficios. Si la tasa de depreciación del capital es de $1/2$ y denotamos por $K = K(t)$ al stock de capital y por $I = I(t)$ a la inversión bruta, entonces la inversión neta puede expresarse como

$$K' = I - \frac{1}{2}K.$$

La empresa desea maximizar el total de sus beneficios

$$\Pi = \int_0^4 K - K^2 - \frac{1}{2}I^2 dt$$

en el horizonte de tiempo $[0, 4]$ y con un capital inicial $K(0) = 1/2$. Resuelva el problema **detalladamente** en cada caso: **(4 puntos)**

3.1) Dejando el capital libre al final del período.

3.2) El capital al final de período es $6/9$.

4. Se desea encontrar $c(t)$, tal que maximice

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} \ln(c) dt$$

sujeto a $x' = rx - c$, $x(0) = b$. Suponga que tanto $x(t)$ como $c(t)$ son acotadas y que $\rho > r > 0$. **(4 puntos)**