PUCP

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES

MATEMÁTICAS PARA ECONOMISTAS

PRÁCTICA CALIFICADA 4

PROFESOR: JORGE R. CHÁVEZ

JEFES DE PRÁCTICA: JOAQUÍN RIVADENEYRA & MARCELO GALLARDO

SEMESTRE 2022-2

FECHA 08-11-2022

1. En relación al sistema

$$x_1' = f(x_1, x_2)$$

$$x_2' = g(x_1, x_2)$$

determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F) **Justifique su respuesta**.

1.1) Si $P^* = (x_1^*, x_2^*)$ es un equilibrio y los valores característicos del sistema lineal asociado, λ_1 y λ_2, son tales que $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ y $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$ se puede decir que P^* se comporta localmente como un equilibrio inestable tipo repulsor. **(2 puntos)**

Falso (F). Si bien para el caso real, las condiciones aseguran que $\lambda_1, \lambda > 0$, si fuesen complejos, $\lambda_1 = \alpha - i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha + i\beta$. Por ende, $\lambda_1\lambda_2 = \alpha^2 + \beta^2 > 0$ y $\lambda_1 + \lambda_2 = 2Re(\lambda_1) > 0$. En dicho caso, tendríamos un comportamiento local de espiral inestable y no de nodo inestable tipo repulsor.

1.2) Si las funciones f y g son lineales y el diagrama de fases es el de la Figura 1, entonces λ_1 y λ_2 son imaginarios puros. **(2 puntos)**

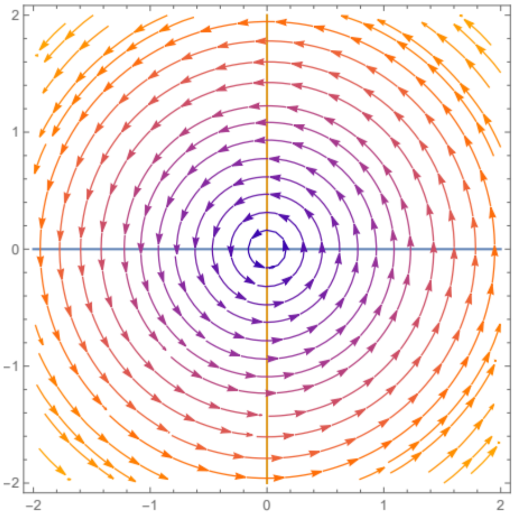

Figura 1: Diagrama de fases 1.

Verdadero pues, gráficamente, se trata de un centro.

1.3) En relación a la Figura 1, sea $P_0 = (x_0, y_0) \neq (0,0)$ una condición inicial. En este caso la trayectoria correspondiente tiene la característica de que si $x_1(t)$ decrece siendo siempre positiva, entonces $x_2(t)$ también decrece. **(2 puntos)**

Falso (F). En el cuadrante 1 se cumple que x_1 decrece siendo siempre positivo, pues la dirección horizontal de las trayectorias es hacia la izquierda. Sin embargo, en este cuadrante x_2 no decrece, más bien crece, pues la dirección vertical de las trayectorias es hacia arriba.

1.4) Si $f(x,y) = e^x - y$ y $g(x,y) = 1 + x - y^2$, $(0,1)$ es un punto de equilibrio inestable.

Verdadero (V). En efecto, $(0,1)$ es un punto de equilibrio, pues $f(0,1) = g(0,1) = 0$. Para analizar su estabilidad, usemos el teorema de H-G:

$$J = \begin{pmatrix} e^x & -1 \\ 1 & -2y \end{pmatrix} \to J_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.6 \\ \lambda_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.6 \end{cases}$$

Ambos equilibrios son hiperbólicos y, por el teorema de H-G, el equilibrio es inestable tipo silla.

2. La Figura 2 proporciona las isoclinas del sistema no lineal

$$x_1' = f(x_1, x_2)$$

$$x_2' = g(x_1, x_2)$$

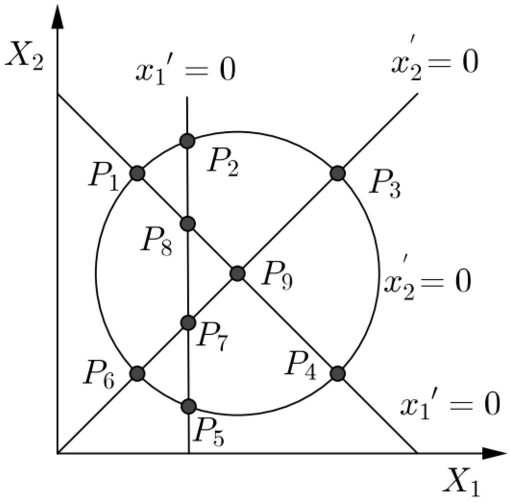

Figura 2: Isoclinas

se le pide que

2.1) Justificando su respuesta, indique los puntos de equilibrio **(2 puntos)**

Los puntos de equilibrio son aquellos en los cuales $x_1' = 0$ y $x_2' = 0$. Es decir, son los puntos en que se cruza una isoclina $x_1' = 0$ con una isoclina $x_2' = 0$.

Los equilibrios son: P_1, P_2, P_4, P_5, P_7, P_9.

2.2) A partir de las isoclinas proponga dos posibles funciones f y g. **(3 puntos)**

A partir del gráfico, es razonable suponer lo siguiente:

- Las rectas con pendiente positiva y negativa tienen pendiente 1 y -1 respectivamente.
- La circunferencia está centrada en P_9, punto cuyas ordenada y abscisa son iguales: $P_9 = (a, a)$, $a > 0$

Además, se debe cumplir lo siguiente:

- El radio de la circunferencia (r) debe ser menor a a, para que toda la circunferencia esté contenida en el primer cuadrante. $0 < r < a$
- La recta vertical debe pasar a la derecha de los puntos P_1 y P_6 (puntos de intersección entre recta y circunferencia) y a la izquierda del punto $P_9 = (a, a)$. Matemáticamente, la recta vertical debe ser $x_1 = b$, donde $a - \sqrt{\dfrac{r^2}{2}} < b < a$

Por lo tanto, las posibles funciones f y g son aquellas que cumplan con lo siguiente:

$$g(x_1,x_2) = \pm(x_2-x_1)\cdot\left((x_1-a)^2+(x_2-a)^2-r^2\right), \qquad 0<r<a$$

$$f(x_1,x_2) = \pm(2a-x_1-x_2)\cdot(x_1-b), \qquad 0<a-\sqrt{\frac{r^2}{2}}<b<a$$

3. Suponga que la riqueza $x=x(t)$ de un individuo evoluciona de acuerdo con la siguiente dinámica

$$x' = ax - c$$

donde $a>0$ es una tasa de retorno y $c=c(t)$ su consumo. EL individuo busca maximizar el valor presente de su utilidad, dada por $u(c)=\ln c$, a lo largo del periodo $[t_0,t_1]$. Sabiendo que posee una riqueza inicial x_0 resuelva lo siguiente.

3.1) Considere el factor de descuento $e^{\rho t}, \rho>0$. Plantee el problema de maximización del individuo como un problema de control óptimo e identifique las variables de control y de estado. **(3 puntos)**

El problema del individuo es:

$$\begin{aligned} \max_{c(t)} \quad & \int_{t_0}^{t_1} e^{-\rho t}\ln c(t)dt \\ \text{s.a.} \quad & x'(t) = ax(t)-c(t) \\ & x(t_0)=x_0 \\ & 0\le c(t)\le x(t). \end{aligned}$$

donde $c(t)$ es la variable de control y $x(t)$ es la variable de estado.

3.2) Obtenga la trayectoria óptima del consumo $c^*=c^*(t)$. **(4 puntos)**

Aplicamos el principio del máximo para este caso: instante final t_1 dado y estado final $x(t_1)$ libre.

$$H = e^{-\rho t}\ln c + \lambda(ax-c)$$

1. $\lambda' = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -a\lambda \to \lambda(t) = Ae^{-a(t-t_0)}$

   $\lambda(t_1)=0\to A=0\to\lambda(t)=0$

2. $c(t) = \max\limits_{0\le c\le x} H = \max\limits_{0\le c\le x}[e^{-\rho t}\ln c+\lambda(ax-c)] = \max\limits_{0\le c\le x}[e^{-\rho t}\ln c] = \max\limits_{0\le c\le x} c = x(t)$

3. $x' = ax - c \to x' = ax - x \to x' = (a-1)x \to x(t) = Be^{(a-1)(t-t_0)}$

   $x(t_0) = x_0 \to B = x_0 \to x(t) = x_0 e^{(a-1)t}$

Finalmente, como $c(t) = x(t) \to c(t) = x_0 e^{(a-1)(t-t_0)}$.

OPCIONAL Fecha y hora de entrega: jueves 10 de octubre hasta las 23 horas mediante Paideia. **(3 puntos)**

1. Resuelva completamente la PC4

2. En relación con el problema 3; si por propósito de herencia el individuo deja $x(t_1) = x_1$, obtenga las trayectorias óptimas de consumo y riqueza.

En este caso, tendremos que el instante final t_1 es dado y el estado final $x(t_1) = x_1$ es dado. El problema del individuo es:

$$\begin{aligned} \max_{c(t)} \quad & \int_{t_0}^{t_1} e^{-\rho t} \ln c(t) dt \\ \text{s.a.} \quad & x'(t) = ax(t) - c(t) \\ & x(t_0) = x_0 \\ & x(t_1) = x_1 \\ & 0 \leq c(t) \leq x(t). \end{aligned}$$

donde $c(t)$ es la variable de control y $x(t)$ es la variable de estado. El principio del máximo provee:

$$H = e^{-\rho t} \ln c + \lambda(ax - c)$$

1. $\lambda' = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -a\lambda \to \lambda(t) = Ae^{-a(t-t_0)}$, $\lambda(t_1) = 0$ i.e., $A = 0$.
2. $$c(t) = \max_{0 \leq c \leq x} H = \max_{0 \leq c \leq x} [e^{-\rho t} \ln c] \implies c = x.$$

   $\to x' = (a-1)x \implies x(t) = x_0 e^{(a-1)t} = c^*(t)$. Obs: la solución $c(t) = Ae^{-\rho t} e^{a(t-t_0)}$, si bien se obtiene aplicando el principio del máximo, excluye la posibilidad $\lambda = 0$ (que justamente es el caso en $t = t_1$).

3. Si $\rho \neq a$, primero notemos que, aplicando el principio del máximo, $\lambda' = -H_x$

   $$\lambda(t) = Ae^{-a(t-t_0)}.$$

   Luego,

   $$\frac{\partial H}{\partial c} = \frac{e^{-\rho t}}{c} - \lambda = 0 \implies c(t) = Ae^{-\rho t} e^{a(t-t_0)}.$$

Si $\rho \neq a$, resolvemos

$$x'(t) = ax - Ae^{(a-\rho)t}e^{-at_0}.$$

Luego,

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{\tau}^{t} a(s)ds}b(\tau)d\tau.$$

Esto es,

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 + \frac{A}{\rho}e^{(a-\rho)t}e^{-at_0} - \frac{A}{\rho}e^{at}e^{-(\rho+a)t_0}.$$

Luego, como $x(t_1) = x_1$,

$$A = \frac{\rho\big(x_1 - x_0e^{a(t_1-t_0)}\big)}{e^{-\rho t_1} - e^{-\rho t_0}}.$$