PUCP

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES

MATEMÁTICAS PARA ECONOMISTAS IV

PRÁCTICA CALIFICADA 4

PROFESOR: JORGE R. CHÁVEZ

JEFES DE PRÁCTICA: JOAQUÍN RIVADENERYA & MARCELO GALLARDO

SEMESTRE 2022-2

FECHA 5-11-2022

1) Preguntas rápidas para calentar. Cada una vale **2 puntos**. En relación al sistema

$$(NL): \begin{cases} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y), \end{cases}$$

determine la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

1.1) Si x^* es un equilibrio de NL y los valores propios del sistema lineal asociado son tales que $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, se puede decir que x^* se comporta localmente como un punto silla.

1.2) Si las funciones f y g son lineales y el diagrama de fases es el siguiente,

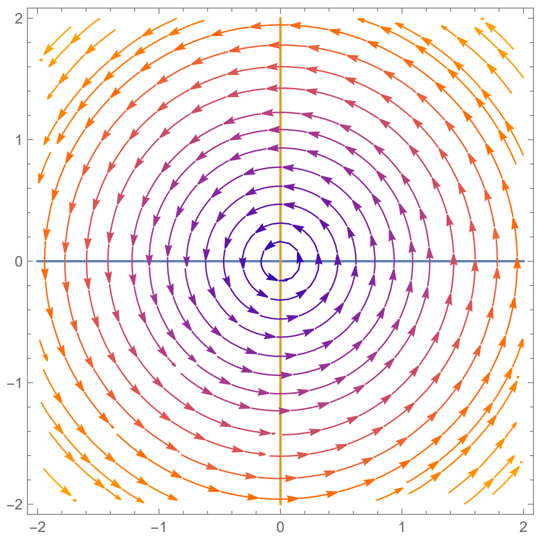

Figura 1: Diagrama de fases 1.

los valores propios de la matriz asociada al sistema lineal son imaginarios puros.

1.3) En relación a la Figura (1), existe $x_0 = (x_{10}, x_{20}) \neq (0,0)$ tal que la trayectoria que pasa por x_0 converge a $(0,0)$.
1.4) Si $f(x,y) = e^x - y$ y $g(x,y) = 1 + x - y^2$, $(0,1)$ un punto de equilibrio inestable.

2) Suponga que la riqueza $x = x(t)$ de un individuo evoluciona según la siguiente dinámica

$$x' = ax - c,$$

donde $a > 0$ es una tasa de retorno y $c = c(t)$ su consumo. El individuo busca maximizar el *valor presente* de su utilidad, dada por $u(c) = \ln c$, a lo largo del periodo $[t_0, t_1]$. Se sabe que posee una riqueza inicial x_0 y, por propósitos de herencia, se tiene que $x(t_1) = x_1$.

2.1) Considere el factor de descuento $e^{-\rho t}, \rho > 0$. Plantee el correspondiente problema maximización del individuo como un problema de control óptimo. **(2 puntos)**
2.2) Aplique el Principio del Máximo y obtenga la trayectoria del consumo $c = c(t)$.
(2 puntos)

3) Considere la siguiente dinámica que describe el estado operacional de una máquina x

$$x' = u - \delta x, \ x(t_0) = x_0.$$

Acá u es el mantenimiento y $\delta > 0$ una tasa de depreciación. El objetivo de la firma es maximizar el valor presente de sus beneficios

$$\Pi = \pi x - \frac{u^2}{2}, \pi > 0$$

sobre un periodo $[t_0, t_1]$. Si la máquina llega en buen estado al final del periodo, se le atribuye una ganancia adicional a la firma $Sx(t_1)e^{-\rho t_1}, \rho, S > 0$.
3.1) Identifique la variable de control y la variable de estado.
(1 punto)
3.2) Identifique la función de ponderación del estado final y los costos de la firma.
(1 punto)
3.3) Si el factor de descuento es $e^{-\rho t}$, plantee el problema de optimización de la firma.
(2 puntos)
3.4) Aplique el Principio del Máximo y obtenga las ecuaciones canónicas.
(2 puntos)
3.4) A partir de la expresión para la variable de co-estado, obtenga la trayectoria de la variable de control. Demuestre finalmente que esta es creciente si $K > \frac{\pi}{\rho+\delta}$. Interprete.
(2 puntos)

Bonus (entregar hasta las 23h del día 10/11/2022).

a) Resuelva completamente la PC. **(1 punto)**

b) En relación a la pregunta 2.4), resuelva el problem como un problema de cálculo de variaciones. Para esto, obtenga una ecuación diferencial de segundo orden para la riqueza x, y de ahí resuélvala. Con ello, puede obtener $c(t)$.

(2 puntos)