PUCP

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES

MATEMÁTICAS PARA ECONOMISTAS IV

PRÁCTICA CALIFICADA 3

PROFESOR: JORGE R. CHÁVEZ

JEFES DE PRÁCTICA: JOAQUÍN RIVADENERYA & MARCELO GALLARDO

SEMESTRE 2022-2

FECHA 19-10-2022

1) Analice la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados en relación a la ecuación diferencial

$$x'(t) = F(x(t)). \tag{1}$$

a) Si $F(x) = e^x$, la ecuación posee infinitos equilibrios.

Como $e^x > 0$ para cualquier x, la ecuación no posee ningún equilibrio. (F)

b) Si $F(x) = x^2 + 2x - 1$, la ecuación posee un único equilibrio.

Resolviendo $F(x) = 0$ se obtiene $x_1 = \sqrt{2} - 1$ y $x_2 = -1 - \sqrt{2}$. Así, hay más de un equlibrio (F).

c) Si $F(x) = x^2 + x - 2$, $x^* = 1$ es un equilibrio inestable.

$F(1) = 0$ y $F'(1) = 3$. Así, $x^* = 1$ es un equilibrio inestable. (V)

d) Si $\varphi(t) = t + 3$ es solución, entonces, $\psi(t) = t + 4$ también es solución.

Si $\varphi(t)$ es solución, $\psi(t) = \varphi(t + c)$ también para cualquier $c \in \mathbb{R}$. Acá $c = 1$. (V)

2.1) $p'/p = p - 6 - 5/p$. Evaluando en $p = 4$, se obtiene $(p'/p)(p = 4) = -3/4$.

2.2) $p^2 - 6p + 5 = (p - 5)(p - 1)$. Así, los precios de equilibrio son $p^* = 1$ o $p^* = 5$.

2.3) Identificando los equilibrio, su estabilidad, y el hecho que $p' < 0$ para $p \in (1, 5)$, $p' > 0$ para $p > 5$ o $p < 1$, se obtiene:

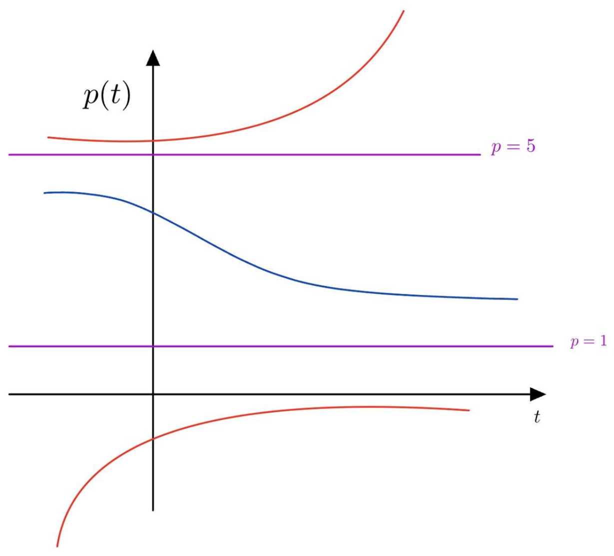

Figura 1: (t, p).

2.4) Computamos $F'(p) = 2p - 6$. $F'(1) = -4 < 0$ mientras que $F'(5) = 4$. Así, $p^* = 1$ es un equilibrio estable y $p^* = 5$ es un equilibrio inestable.

2.5) Ver diagrama de fases. Analíticamente, notemos que $p' > 0$ para todo $p > 5$.
2.6) Debemos tener $p(0) \leq 5$. Si $p(0) = 5$, como es equilibrio, $p = 5$ para todo t. Lo mismo si $p(0) = 1$, $p = 1$ para todo t. Si $p(0) < 1$ o $p(0) \in (1, 5)$

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = 1.$$

Bonus.

2) Considere la siguiente ecuación diferencial no lineal

$$x'(t) = a\sqrt{x(t)} - bx(t), \;\; a, b > 0. \tag{2}$$

a) Encuentre (el) los equilibrio(s) en términos de los parámetros.
$x = 0$ y $x = (a/b)^2$.

(2 puntos)

b) Si $a = 2$ y $b = 1/2$ analice la estabilidad del equilibrio no trivial.

$$F'(16) = \frac{1}{\sqrt{16}} - \frac{1}{2}16 < 0.$$

Así, el equilibrio es estable.

(2 puntos)

Si revuelve la ecuación diferencial y obtiene $x(t)$, para $a = 2$ y $b = 1/2$ ganará 2 puntos adicionales.

La ecuación (2) *está altamente relacionada con teoría del crecimiento pues expresa una versión de la ecuación fundamental del modelo de Solow.*

3) De regreso al problema del consumidor, considere que las preferencias del individuo están dadas por la función de utilidad

$$u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

Nos interesamos al problema de maximización de la utilidad

$$\begin{cases} \text{máx} & u(x_1, x_2) \\ s.a.: & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

a) Grafique las curvas de indiferencia. ¿Es la relación de preferencias convexa?

Son circunferencias centradas en el origen. La función es estrictamente convexa, por ende, no es cuasicóncava, y la preferencia no es entonces convexa.

(1 punto)

b) Resuelva el problema por curvas de indiferencia.

Se identifica que $(0, 1)$ y $(0, 1)$ son solución.

(1 punto)

c) Resuelva el problema de maximización aplicando Kuhn-Tucker.

(2 puntos)

Aplicando KKT, se obtienen $(0, 1)$, $(0, 1)$ y $(1/2, 1/2)$ como candidatos a óptimo. Evaluando en la función, se llega a que los dos primeros son solución.