PUCP

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES

MATEMÁTICAS PARA ECONOMISTAS

PRÁCTICA CALIFICADA 2

PROFESOR: JORGE R. CHÁVEZ

JEFES DE PRÁCTICA: JOAQUÍN RIVADENEYRA & MARCELO GALLARDO

SEMESTRE 2022-2

FECHA 20-09-2022

NOTA Está permitido el uso de apuntes y notas de clase.

1) Sin justificar su respuesta, indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F):

1.1) La función $f(x,y) = \ln(\sqrt{x+y})$ es convexa **(1 punto)**

Falso (F). La función $x + y$ es cóncava y convexa a la vez, pues es lineal. La función $\sqrt{x}$ es estrictamente cóncava y creciente. Por tanto, la composición de las dos anteriores, la función $\sqrt{x+y}$, es estrictamente cóncava. Además, la función $\ln(x)$ es estrictamente cóncava y creciente. Entonces, la composición $f(x,y) = \ln(\sqrt{x+y})$ es **estrictamente cóncava**. Ello contradice la afirmación de que sea convexa.

1.2) La función $f(x,y) = e^{x+y^2+8}$ es convexa **(1 punto)**

Verdadero (V). La función $x + y^2 + 8$ es convexa pues es la suma de una función linea con una estrictamente convexa (y un términos constante). Por otro lado, la función e^x es creciente y escrictamente convexa. Por lo tanto, la composición $f(x,y) = e^{x+y^2+8}$ es en particular convexa.

1.3) El producto de funciones convexas genera una función convexa **(1 punto)**

Falso (F). Por ejemplo, $f(x) = (1+x)$ es convexa (cóncava y convexa a la vez). Además, $g(x) = (1-x)$ es convexa (cóncava y convexa a la vez). Sin embargo, $h(x) = f(x)\cdot g(x) = 1 - x^2$ no es convexa, si no estrictamente cóncava, pues $h''(x) = -2 < 0$.

1.4) Si f es cóncava y g es convexa, entonces $2f - (3/4)g - 2$ es cóncava. **(1 punto)**

Verdadero (V). Si g es convexa, entonces $-\frac{3}{4}g$ es cóncava. Además, si f es cóncava, $2f$ también lo es. La suma de estas dos funciones cóncavas, es decir, $2f - \frac{3}{4}g$, será cóncava, y finalmente sumar una constante (-2) no altera la *naturaleza cóncava* de la función.

2) Considere la siguiente función con parámetros α y β:

$$f(x,y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + 4xy - 10.$$

2.1) Calcule la matriz Hessiana de $f(x,y)$ **(2 puntos)**

$$H = \begin{pmatrix} 2\alpha & 4 \\ 4 & 2\beta \end{pmatrix}$$

2.2) Determine los valores de α y β para que la función sea convexa **(3 puntos)**

La matriz Hessiana debe ser positivo semidefinida; es decir, sus menores arbitrarios deben ser todos mayores o iguales a cero. Es decir:

$$m_1^2 = 2\alpha \geq 0 \to \alpha \geq 0$$

$$m_1^1 = 2\beta \geq 0 \to \beta \geq 0$$

$$m_2 = |H| = (2\alpha)(2\beta) - (4)(4) = 4\alpha\beta - 16 = 4(\alpha\beta - 4) \geq 0 \to \alpha\beta \geq 4$$

Por lo tanto, se debe cumplir $\alpha \geq 0 \wedge \beta \geq 0 \wedge \alpha\beta \geq 4$. para que la función sea convexa.

2.3) ¿Qué puede decir de la convexidad (concavidad) de la función en el caso de que $\alpha = -3$ y $\beta = -5$? **(3 puntos)**

En ese caso, la matriz hessiana se torna

$$H = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$M_1 = -6 < 0$$

$$M_2 = |H| = (-6)(-10) - (4)(4) = 44 > 0$$

Por ende, $H < 0$, i.e., la función es estrictamente cóncava.

3) Considere la siguiente función de utilidad con parámetros α y β:

$$u(x,y) = x^\alpha + y^\beta;\ x, y \geq 0.$$

3.1) Como usted sabe, normalmente se imponen ciertas condiciones básicas para que la función u represente, en efecto, la utilidad del consumidor. Por ejemplo (tomando el lenguaje de la teoría de la producción), que sea monótona respecto a sus factores, o que tenga rendimientos marginales decrecientes. En este sentido, ¿qué condiciones impondría respecto de los parámetros α y β? **(2 puntos)**

Para que la función exhiba monotonicidad (ciertamente monótona creciente), se debe cumplir

$$u'_x = \alpha x^{\alpha-1} \geq 0 \to \alpha \geq 0$$

y además

$$u'_y = \beta y^{\beta-1} \geq 0 \to \beta \geq 0.$$

Por otro lado, para que la función tenga rendimientos marginales decrecientes, se debe cumplir que sea cóncava respecto a sus argumentos:

$$u''_{xx} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \leq 0 \to \alpha \in [0,1]$$

$$u''_{yy} = \beta(\beta-1)x^{\beta-2} \leq 0 \to \beta \in [0,1].$$

En conclusión, sería deseable que $\alpha \in [0,1]$ y $\beta \in [0,1]$.

Si para $\alpha = 0.5$ y $\beta = 1$, la función u representa correctamente las preferencias $\succeq$, resuelva lo siguiente:

3.2) ¿Son indiferentes los pares (1, 1) y $(4, 0)$? **(2 puntos)**

Primero, definimos la relación de preferencias representada por u:

$$x \succeq y \leftrightarrow u(x) \geq u(y) \leftrightarrow x_1^{0.5} + x_2 \geq y_1^{0.5} + y_2$$

Entonces, la indiferencia es definida como

$$x \sim y \leftrightarrow x_1^{0.5} + x_2 = y_1^{0.5} + y_2$$

Para los pares $(1,1)$ y $(4,0)$, la condición de indiferencia es

$$(1,1) \sim (4,0) \leftrightarrow 1^{0.5} + 1 = 4^{0.5} + 0$$

la cual se cumple, por lo que son efectivamente pares indiferentes.

3.3) Encuentre $I_{(1,1)}$ **(2 puntos)**

El conjunto de indiferencia es:

$$I_{(1,1)} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \ : \ (x_1, x_2) \sim (1,1)\}$$

$$I_{(1,1)} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \ : \ x_1^{0.5} + x_2 = 1^{0.5} + 1\}$$

$$I_{(1,1)} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \ : \ x_1^{0.5} + x_2 = 2\}.$$

3.4) ¿Es convexa la relación de preferencias? Explique. **(2 puntos)**

La relación de preferencias es convexa. En caso I haya sido correctamente determinado, basta con justificar mediante argumentos geométricos que

$$\bar{\mathcal{C}} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2_+ \ : \ (y_1, y_2) \succeq (x_1, x_2)\}$$

dado en este caso por

$$\bar{\mathcal{C}} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2_+ \ : \ y_1^{0.5} + y_2 \geq x_1^{0.5} + x_2\}$$

es convexo. Analíticamente, tenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned} x &\preceq y \\ U(x) &\leq U(y) \\ U(x_1, x_2) &\leq U(y_1, y_2) \\ \sqrt{x_1} + x_2 &\leq \sqrt{y_1} + y_2 \\ z &= \theta x + (1-\theta) y = (\theta x_1 + (1-\theta) y_1, \theta x_2 + (1-\theta) y_2). \end{aligned}$$

Luego, queremos llegar a

$$U(z) = \sqrt{\theta x_1 + (1-\theta) y_1} + \theta x_2 + (1-\theta) y_2 \geq \sqrt{\theta x_1 + (1-\theta) x_1} + \theta x_2 + (1-\theta) x_2 = U(x).$$

Esta desigualdad se cumple pues,

$$U(z) - U(x) = \sqrt{\theta x_1 + (1-\theta) y_1} - \sqrt{x_1} + (1-\theta)(y_2 - x_2).$$

En efecto, como la función logaritmo es cóncava,

$$\sqrt{\theta x_1 + (1-\theta) y_1} - \sqrt{x_1} \geq \theta \sqrt{x_1} + (1-\theta)\sqrt{y_1} - \sqrt{x_1} = (1-\theta)(\sqrt{y_1} - \sqrt{x_1}).$$

Así,

$$U(z) - U(x) = \sqrt{\theta x_1 + (1-\theta) y_1} - \sqrt{x_1} + (1-\theta)(y_2 - x_2) \geq (1-\theta)(\sqrt{y_1} - \sqrt{x_1}) + (1-\theta)(y_2 - x_2).$$

Como $(x \preceq y)$

$$y_2 + \sqrt{y_1} - \sqrt{x_1} - x_2 \geq 0,$$

y $\theta \in [0,1]$, se concluye entonces que $U(z) - U(x)$, i.e., la preferencia es convexa.

OPCIONAL Fecha y hora de entrega: jueves 22 de setiembre hasta las 23 horas mediante Paideia. **(3 puntos)**

1) Resuelva completamente la PC2.

2) Suponga que la felicidad de una madre $u(x)$ depende de la felicidad de sus dos hijos ($f(x)$ y $g(x)$) de la siguiente manera:

$$u(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$$

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones de utilidad cóncavas, demuestre que la utilidad de la madre también lo es.

Lo que se pide es, en realidad, probar que el mínimo de dos funciones cóncavas es cóncavo. Por definición, si $f(x)$ y $g(x)$ son cóncavas, definiendo $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, para todo $\lambda \in [0,1]$:

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \leq f(z)$$

$$\lambda g(x) + (1-\lambda) g(y) \leq g(z)$$

De aquí, tomando mínimos, se notan las desigualdades:

$$\lambda \, \text{mín}\{f(x), g(x)\} + (1-\lambda) \, \text{mín}\{f(y), g(y)\} \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \leq f(z)$$

y de manera análoga

$$\lambda \, \text{mín}\{f(x), g(x)\} + (1-\lambda) \, \text{mín}\{f(y), g(y)\} \leq \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y) \leq g(z)$$

por lo tanto:

$$\lambda \, \text{mín}\{f(x), g(x)\} + (1-\lambda) \, \text{mín}\{f(y), g(y)\} \leq \text{mín}\{f(z), g(z)\}$$

lo cual prueba que la función $\text{mín}\{f(x), g(x)\}$ es cóncava.

3) Determine si las siguientes funciones son cuasicóncavas (estrictas) o cuasiconvexas (estrictas) en el dominio indicado.

3.1) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2, \quad x, y > 0$

3.2) $f(x,y) = \alpha \ln x + \beta \ln y, \quad \alpha, \beta > 0, \quad x, y > 1$

Si una función es estrictamente convexa, entonces, en particular, es estrictamente cuasiconvexa. Por ende, como $f(x,y)$ es estrictamente convexa (suma de dos funciones estrictamente convexas, hessiana ...), en particular, es estrictamente cuasiconvexa. Esto es análogo para la función $f(x,y) = \alpha \ln x + \beta \ln y, \quad \alpha, \beta > 0, \quad x, y > 1$, salvo que acá, más bien, f es estrictamente cóncava, y por ende, estrictamente cuasicóncava. Una manera más operativa de llegar al mismo resultado es calculando los **determinantes hessianos ampliados**

$$M_r(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} 0 & f_1(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_r(\boldsymbol{x}) \\ f_1(\boldsymbol{x}) & f'_{11}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{1r}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_r(\boldsymbol{x}) & f_{r1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{rr}(\boldsymbol{x}) \end{vmatrix}.$$

Para la primera función, queda

$$M_1(x) \begin{vmatrix} 0 & 2x \\ 2x & 2 \end{vmatrix}.$$

y

$$M_2(x) \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2 & 0 \\ 2y & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Computamos $M_1(x) = -4x^2 < 0$ (pues $x > 0$), y $M_2(x) = -8x^2 - 8y^2 < 0$. Análogamente, para la segunda función, queda

$$(-1)M_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\alpha}{x} \\ \frac{\alpha}{x} & \frac{-\alpha}{x^2} \end{vmatrix} = (-1)\left(-\frac{\alpha^2}{x^2}\right) = \frac{\alpha^2}{x^2} > 0$$

y

$$(-1)^2 M_2(x) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\alpha}{x} & \frac{\beta}{y} \\ \frac{\alpha}{x} & \frac{-\alpha}{x^2} & 0 \\ \frac{\beta}{y} & 0 & \frac{-\beta}{y^2} \end{vmatrix} = \frac{\alpha^2\beta + \alpha\beta^2}{x^2 y^2} > 0.$$