PUCP

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES

MATEMÁTICAS PARA ECONOMISTAS IV

SOLUCIONARIO DE LA PRÁCTICA CALIFICADA 1

PROFESOR: JORGE R. CHÁVEZ

JEFES DE PRÁCTICA: JOAQUÍN RIVADENERYA & MARCELO GALLARDO

SEMESTRE 2022-2

FECHA 06-09-2022

1.1) Calculamos

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{(-\sqrt{5})^2 + 0^2 + (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{5+5+5} = \sqrt{15} \neq 5.$$

1.2) Hay que verificar si $||(1,1)-(2,1)|| < 2$. Veamos,

$$||(1,1)-(2,1)|| = ||(-1,0)|| = \sqrt{(-1)^2+0^2} = 1 < 2.$$

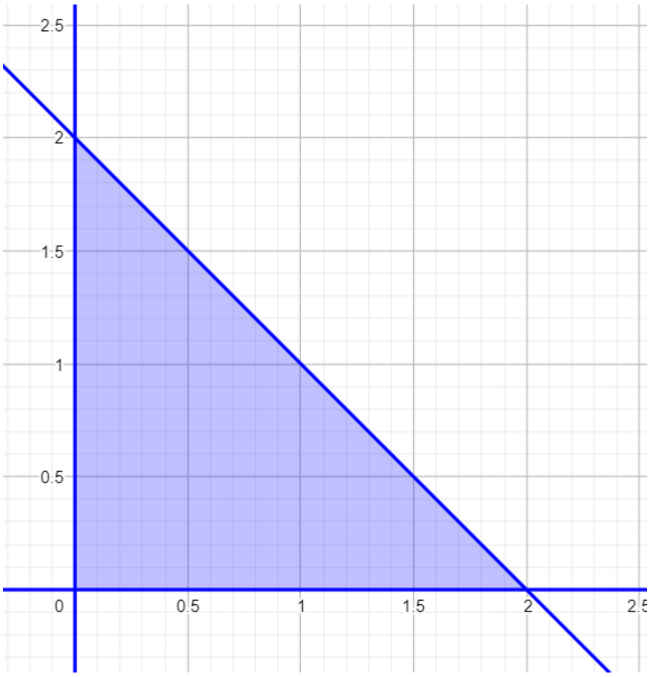
Por ende, $x = (1,1) \in B((2,1),2)$.

1.3) Ciertamente $\mathcal{B}(x_0, r) \subset \mathcal{B}(x_0, 2r)$ pues, si $x \in \mathcal{B}(x_0, r)$,

$$||x - x_0|| < r < 2r \implies x \in \mathcal{B}(x_0, 2r).$$

En conclusión: F, V, y V.

2.1) El punto $A \in \Delta$ pero $B \notin \Delta$ pues $3/2 > 2 - 3/2 = 1/2$. O sea, A es factible pero B no lo es. Gráficamente, el conjunto es:



2.2) Sí, pues el conjunto Δ es convexo, y $2/5C + 3/5D$ corresponde a la combinación convexa

$$\theta C + (1-\theta)D,\ \ C, D \in \Delta,$$

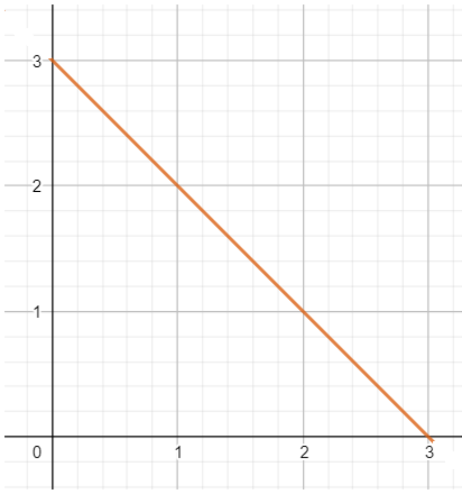
con parámetro $\theta = 2/5$. Note que Δ es convexo pues corresponde al conjunto de la restricción presupuestaria, $I = 2$, $p_i = 1$ (el cual es convexo). *Se puede demostrar sin mayor dificultad (analíticamente) que Δ es convexo.*

2.3) Si las preferencias son monótonas, la canasta que le proporciona al consumidor mayor satisfacción se encuentra en la *frontera superior*, es decir

$$x_2 = 2 - x_1,\ \ 0 \leq x_1 \leq 2.$$

3.1) Como $2 + 1 < 1 + 3$, $A \prec B$. O sea, B es preferido a A.

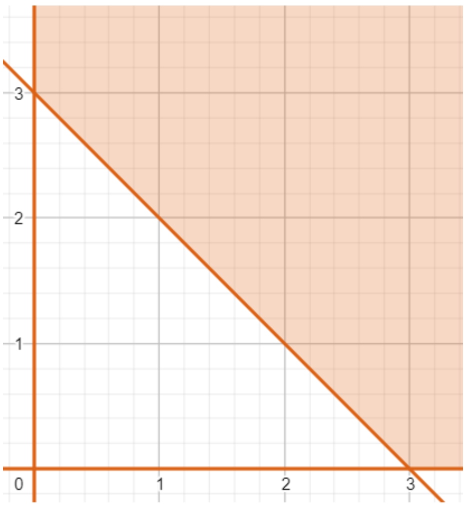
3.2) El conjunto de indiferencia corresponde a todos los puntos en $\mathbb{R}^2$ tales que $x_1 + x_2 = 3$, además $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Gráficamente:



3.3) El contorno superior corresponde a la región del plano definida por

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 + x_2 \geq 3 \;, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Gráficamente:



3.4) La relación de preferencias es convexa pues, si $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$, definiendo

$$z = \theta(x_1, x_2) + (1 - \theta)(y_1, y_2), \;\; \theta \in \mathbb{R}^2,$$

tenemos que

$$\theta x_1 + (1-\theta)y_1 + \theta x_2 + (1-\theta)y_2 = \theta(x_1 + x_2) + (1-\theta)(y_1 + y_2) \geq \theta(y_1 + y_2) + (1-\theta)(y_1 + y_2) = y_1 + y_2,$$

Es decir, dado $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ y, por tanto, $x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2$, se demuestra que $(z_1, z_2) \succeq (y_1, y_2)$.

Bonus.

1) La relación de preferencias es continua y racional. Es continua pues $f(a,b) = a+b$ es continua. Luego, si $x_n \preceq y_n$ y $x_n \to x$, $y_n \to 0$, por estabilidad de límites

$$f(x_n) \geq f(y_n),\ \forall\ n \in \mathbb{N} \implies f(x) \geq f(y).$$

La racionalidad es consecuencia de la relación de orden en $\mathbb{R}$. Si $x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2$ y $y_1 + y_2 \geq z_1 + z_2$, entonces ciertamente $x_1 + x_2 \geq z_1 + z_2$. Luego, es completa porque siempre se puede comparar dos números en $\mathbb{R}$. Acá $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$. Ahora, dado $\alpha \in \mathbb{R}_+$, la familia de funciones de utilidad $U(x_1, x_2) = \alpha(x_1 + x_2)$ cumplen. En efecto, si

$$(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) \implies \alpha(x_1+x_2) \geq \alpha(y_1+y_2) \implies x_1+x_2 \geq y_1+y_2,\ (x \succeq y \implies U(x) \geq U(y)).$$

Ciertamente, la función de utilidad más intuitiva es cuando $\alpha = 1$. O sea, $U = x_1 + x_2$.

2) Veamos que $\mathcal{B}(x_0, r)$ es un conjunto convexo. Esto es, dados $x, y \in \mathbb{B}(x_0, r)$ y $\theta \in [0,1]$,

$$\theta x + (1-\theta)y \in \mathcal{B}(x_0, r).$$

O sea,

$$||\theta x + (1-\theta)y - x_0|| < r.$$

Para esto, se hace uso de la desigualdad triangular: $||a+b|| \leq ||a|| + ||b||$.

$$\begin{aligned}
||\theta x + (1-\theta)y - x_0|| &= ||\theta x + (1-\theta)y - \theta x_0 + \theta x_0 - x_0|| \\
&= ||\theta(x - x_0) + (1-\theta)(y - x_0)|| \\
&\leq ||\theta(x - x_0)|| + ||(1-\theta)(y - x_0)|| \\
&= \theta||x - x_0|| + (1-\theta)||y - x_0||.
\end{aligned}$$

Finalmente, como $x \in \mathcal{B}(x_0, r)$ y $y \in \mathcal{B}(x_0, r)$, $||x - x_0|| < r$ y $||y - x_0|| < r$. Así,

$$\theta||x - x_0|| + (1-\theta)||y - x_0|| < \theta r + (1-\theta)r = r.$$