Práctica Dirigida 6

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
MATEMÁTICA PARA ECONOMÍA Y FINANZAS 3 (1MAT27)
Semestre: 2022-1
Fecha: 02/07/22
Profesor: Jorge Chávez Fuentes (jrchavez@pucp.edu.pe)
Jefes de Práctica: Joaquin Rivadeneyra (jrivadeneyrab@pucp.edu.pe),
Marcelo Gallardo (marcelo.gallardo@pucp.edu.pe),
Mauricio Vallejos (mauricio.vallejos@pucp.edu.pe).

---

1. Considere el siguiente sistema dinámico discreto

$$x(t+1) = x(t) + rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right).$$

a) Identifique el modelo y provea una interpretación de los parámetros r y K.

b) Encuentre los equilibrios.

c) Analice la estabilidad de los equilibrios encontrados.

2. Encuentre los equilibrios de las siguientes ecuaciones:

- $x(t+1) = x^2(t) - 9$.
- $x(t+1) = e^{x(t)} - 1$.

Cuando sea posible, aplique el teorema de estabilidad 21 (notas de clase) para analizar los equilibrios hallados.

3. Pruebe que la siguiente función es una contracción:

$$f(x) = \frac{1}{x+1},\ x > 1.$$

¿Es la función $f(x) = e^x$ una contracción?

4. ¿Para qué valores de α y β la función

$$f(x) = \alpha x + \beta$$

es una contracción?

5. ¿Para qué valores de θ la función

$$f(x) = e^{\theta x},\ x > 0.$$

es una contracción?

6. Considere el siguiente problema de Kuhn Tucker

$$\begin{array}{ll} \max & f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x \\ s.a & x^2 + y^2 \leq 1. \end{array}$$

(a) ¿Se puede abordar el problema como si fuera un problema de Lagrange?

(b) Resuelva el problema con las condiciones de K-T.

7. Resuelva los siguientes problemas empleando las condiciones de Kuhn-Tucker, asumiendo que tienen solución.

a)

$$\begin{array}{ll} \max & f(x,y,z) = 4z - x^2 - y^2 - z^2 \\ s.a.: & x^2 + y^2 + z^2 \leq 3 \\ & z \leq xy. \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ll} \max & f(x,y) = \frac{1}{2}x - y \\ s.a. & x + e^{-x} \leq y \\ & x \geq 0. \end{array}$$

8. Considere el problema Opt $f(x,y) = 2x + 2y - (x+y)^2$, s.a: $x^2 + y^2 \leq 1$, $x + y \geq -1$, $x^2 + y \leq 1$, Además, denote el conjunto de restricciones por X.

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones. Justifique su respuesta.

(a) Con toda seguridad puede decirse que el problema tiene solución.

(b) Si $P \in X$ y $\nabla f(P) = 0$, entonces P es un punto óptimo del problema.

(c) Si $P \in X$ y $\nabla f(P) \neq 0$, entonces es seguro que P no es un punto óptimo del problema.

(d) Los puntos $P_1 = (1,0)$ y $P_2 = (0,1)$ cumplen las condiciones de Kuhn Tucker.

9. Considere el siguiente problema de optimización (conocido como el problema del consumidor en microeconomía)

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \max \ U(x_1, ..., x_n) & \\ s.a. & \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq I \\ & x_i \geq 0. \end{cases}$$

Acá p_i, $i = 1, ..., n$ es un parámetro.

a) Asuma que U es continua. ¿El problema tiene solución?

b) Considere que la restricción es con desigualdad estricta, es decir, $\sum_{i=1}^n p_i x_i = I$, y $n = 2$. Resuelva el problema para $U(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$, $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, $\alpha + \beta = 1$.

c) Haga lo mismo para $U(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$.

d) Resuelva el problema considerando $U(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^n (x_i - A_i)^{\alpha_i}$, con $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, $A_i, \alpha_i > 0$. En particular, determine cuando el problema tiene solución, si es única y si es que se puede resolver como un problema de Lagrange.