Práctica Dirigida 5: 1MAT27

Profesor: Jorge Chávez
Jefe de Prácticas: Joaquin Rivadeneyra, Mauricio Vallejos
& Marcelo Gallardo

Junio 2022

Pontificia Universidad Católica del Perú

marcelo.gallardo@pucp.edu.pe

1 Sistemas Lineales

1) Dado el sistema de ecuaciones en diferencias

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

nuestro objetivo es encontrar una fórmula explícita para $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$. Aquí, $t \in \mathbb{Z}_0^+$. Lo primero, es recordar que la fórmula general para un sistema no homogéneo de ecuaciones en diferencias, es la siguiente

$$x(t) = A^t(x(0) - x^*) + x^*,$$

con $x^* = -(A - I)^{-1}b$. Por ende, el primer paso es diagonalizar A. Para ello, obtenemos los valores y vectores propios. Obtenemos

$$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2$$

y

$$v_1 = (1, 2)^T,\ v_2 = (1, 1)^T.$$

Luego, (por inducción),

$$\begin{aligned} A^t &= PJ^tP^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^t & 0 \\ 0 & 2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^t & 0 \\ 0 & 2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3^t + 2^{t+1} & 3^t - 2^t \\ -2 \cdot 3^t + 2^{t+1} & 2 \cdot 3^t - 2^t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Enseguida, calculamos x^*:

$$\begin{aligned}
x^* &= -(A-I)^{-1}b \\
&= -\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Por ende,

$$x(t) = \begin{bmatrix} -3^t + 2^{t+1} & 3^t - 2^t \\ -2\cdot 3^t + 2^{t+1} & 2\cdot 3^t - 2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10}+1 \\ x_{20}+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

O sea,

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= x_{10}(2^{t+1} - 3^t) + x_{20}(3^t - 2^t) + 2^{t+1} - 2^t - 1 \\
x_2(t) &= x_{10}(2^{t+1} - 2\cdot 3^t) + x_{20}(2\cdot 3^t - 2^t) + 2^{t+1} - 2^t - 1.
\end{aligned}$$

2) Tenemos la siguiente ecuación en diferencias de orden 2:

$$x(t+2) = 2x(t+1) + 3x(t) + 2; \quad x(0) = 1/2, \ x(1) = -1/2.$$

Esta es de la forma

$$\boxed{x(t+2) = ax(t+1) + bx(t) + c(t), \quad b \neq 0.} \tag{1}$$

La técnica para resolver este tipo de ecuaciones, es la siguiente. Se introducen las variables de estado

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= x(t) \\
x_2(t) &= x(t+1).
\end{aligned}$$

Así, obtenemos

$$\begin{aligned}
x_1(t+1) &= x(t+1) = 0x_1(t) + 1x_2(t) \\
x_2(t+1) &= x(t+2) = 2x(t+1) + 3x(t) + 2 \\
&= 2x_2(t) + 3x_1(t) + 2.
\end{aligned}$$

Este par de ecuaciones es equivalente al sistema

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

Los valores característicos de la matriz de coeficientes son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$. Para obtener la solución explícita, necesitamos calcular la matriz de cambio de base P. Con los valores característicos obtenidos calculamos los correspondientes vectores característicos para formar la matriz P.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -3/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

La solución de equilibrio es

$$x^* = -(A-I)^{-1}b = -\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

Puesto que $|\lambda_1| > 1$ y $|\lambda_2| \geq 1$, el sistema diverge del equilibrio. Como $x_1(0) = x(0) = 1/2$ y $x_2(0) = x(1) = -1/2$. La solución del sistema está dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= P \begin{bmatrix} 3^t & 0 \\ 0 & (-1)^t \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) + 1/2 \\ x_2(0) + 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{3^t + 3(-1)^t}{4}, \ a_{12} = \frac{3^t - (-1)^t}{4} \\ a_{21} &= \frac{3^{t+1} - 3(-1)^t}{4}, \ a_{22} = \frac{3^{t+1} + (-1)^t}{4}. \end{aligned}$$

Específicamente, la solución de la ecuación escalar es

$$x(t) = x_1(t) = \frac{3^t + 3(-1)^t}{4} - \frac{1}{2}.$$

Como $-1 \leq (-1)^t \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{Z}_0^+$,

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{3^t + 3(-1)^t}{4} = \infty.$$

3) En relación al sistema

$$\begin{aligned} x(t+1) - x(t) - \frac{1}{3}y(t) &= -1 \\ x(t+1) + y(t+1) - \frac{1}{6}y(t) &= \frac{17}{2} \\ x(0) = 5, \ y(0) &= 4, \end{aligned}$$

la primera etapa es plantearlo bajo la forma

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ y(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

De la primera ecuación,

$$x(t+1) = x(t) + \frac{1}{3}y(t) - 1.$$

Luego, reemplazando cone esta expresión en la segunda ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} y(t+1) &= \frac{1}{6}y(t) - x(t+1) + \frac{17}{2} \\ &= \frac{1}{6}y(t) - \left(x(t) + \frac{1}{3}y(t) - 1\right) + \frac{17}{2} \\ &= -\frac{1}{6}y(t) - x(t) + \frac{19}{2}. \end{aligned}$$

De este modo

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ y(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ -1 & -1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 19/2 \end{bmatrix}.$$

Calculamos los valores y vectores propios

$$\lambda_1 = \frac{1}{2},\ v_1 = (-2,3)^T$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{3},\ v_2 = (-1,2)^T.$$

Así,

$$A^t = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2^t & 0 \\ 0 & 1/3^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Luego,

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = -\left(\begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ -1 & -1/6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 19/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, como $(x(0), y(0))^T = (5,4)^T$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{3^t \cdot 2^{1-t} + 1 - 3^t \cdot 2^{2-t} + 2 \cdot 3^{t+1}}{3^t} \\ \\ 3 \cdot 2^{1-t} - 2 \cdot 3^{1-t} - \dfrac{3}{2^t} + \dfrac{4}{3^t} + 3 \end{bmatrix}.$$

2 Ecuaciones en diferencias no lineales

4) Tenemos

$$x(t+1) = \alpha x(t)(1 - x(t)),\ \alpha \neq 0.$$

Recordemos que, si x^* es un equilibrio,

$$x^* = f(x^*).$$

Por ende, debemos resolver

$$x^* = \alpha x^*(1 - x^*).$$

O sea,

$$0 = (\alpha - 1)x^* - \alpha(x^*)^2 = x^*(\alpha - 1 - \alpha x^*).$$

Esto implica que, o bien $x^* = 0$, o bien $x^* = \frac{\alpha-1}{\alpha}$. Para caracterizas el equilibrio, recordemos el siguiente resultado.

Teorema 1. *Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$, una función de clase C^1. Sea $x^* \in\ I$ un equilibrio del sistema*

$$x(t+1) = f(x(t)).$$

a) Si $|f^{'}(x^*)| < 1$, entonces x^* es l.a.e.
b) Si $|f^{'}(x^*)| > 1$, entonces x^* es inestable.

En este caso,

$$f(x) = \alpha x(1-x).$$

Luego,

$$f'(x) = \alpha - 2\alpha x.$$

Así, el equilibrio $x^* = 0$ es inestable si $|\alpha| > 1$ y l.a.e. si $|\alpha| < 1$. Como esto se cumple para todo x, el equilibrio es g.a.e.

Observación. *Si $|f'(x^*)| = 1$, el análisis es más exhaustivo.*

Por otro lado,

$$f'\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) = \alpha - 2\alpha\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) = 2-\alpha.$$

Por ende, el equilibrio es inestable si $\alpha < 2$ o $\alpha > 2$, y es l.a.e. si $|\alpha| < 2$.

5) Por inducción,

$$\begin{aligned}
x(1) &= \frac{1}{2x(0)}\\
x(2) &= \frac{1}{2x(1)} = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2x(0)}} = x_0\\
x(3) &= \frac{1}{2x(2)} = \frac{1}{2x_0}\\
x(4) &= \frac{1}{2x(3)} = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2x_0}} = x_0\\
&\vdots\\
x(2t) &= x_0\\
x(2t+1) &= \frac{1}{2x_0}.
\end{aligned}$$

6) Tenemos $x(0) = x_0$. Luego,

$$\begin{aligned}
x^2(1) &= \frac{x(0)^2}{3} = \frac{x_0^2}{3}\\
x^2(2) &= \frac{x(1)^2}{3} = \frac{x_0^2}{3^2}\\
&\vdots\\
x(t)^2 &= \frac{x_0^2}{3^t}.
\end{aligned}$$

Así, en función de x_0,

$$x(t) = \begin{cases} x_0 3^{-t/2}, & \text{si } x_0 > 0 \\ (-1)^t x_0 3^{-t/2} & \text{si } x_0 < 0. \end{cases}$$

Si $x_0 = 0$, $x(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{Z}_0^+$.

7) Los cinco primeros términos de la ecuación $x(t+1) = f(x(t))$ son

$$x(0) = 1, x(1) = 2, x(2) = 4, x(3) = 16, x(4) = 65536.$$

Veamos cual es la relación explícita. Es decir, hallemos $f(\cdot)$. Vemos que $x(4) = 2^{x(3)}$, $x(3) = 2^{x(2)}$ ... por ende,

$$x(t+1) = 2^{x(t)},\ x(0) = 1.$$

3 Contracciones

Definición 2. Se dice que la función $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una contracción si existe $L \in \mathbb{R}$, $0 < L < 1$, tal que

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1| \quad \forall\ x_1, x_2 \in\ X. \tag{2}$$

El número L se llama *constante de contracción.*

8) Tenemos

$$f(x) = \frac{1}{x+1},\ x > 1.$$

Veamos que f es una contracción.

$$\left| \frac{1}{x_2+1} - \frac{1}{x_1+1} \right| = \left| \frac{x_2 - x_1}{(x_2+1)(x_1+1)} \right|.$$

Como $x_1, x_2 > 1$,

$$(x_2+1)(x_1+1) > 4.$$

Así,

$$\left| \frac{1}{x_2+1} - \frac{1}{x_1+1} \right| \leq \frac{1}{4}|x_2 - x_1|.$$

O sea, en particular, $L = 1/4$.

Observación. *Note que, en particular, todo $L > 1/4$ cumple.*

La función e^x no es una contracción. Aplicar el Teorema del Valor Medio y notas que $f'(x)$ no está acotada en los reales. En efecto,

$$f'(x) = e^x.$$

9) **(Fibonacci)**

Número de mes	Explicación de la genealogía	Parejas de conejos
Comienzo del mes 1	Nace una pareja de conejos (pareja A).	1 pareja en total.
Fin del mes 1	La pareja A tiene un mes de edad. Se cruza la pareja A.	1+0=1 pareja en total.
Fin del mes 2	La pareja A da a luz a la pareja B. Se vuelve a cruzar la pareja A.	1+1=2 parejas en total.
Fin del mes 3	La pareja A da a luz a la pareja C. La pareja B cumple 1 mes. Se cruzan las parejas A y B.	2+1=3 parejas en total.
Fin del mes 4	Las parejas A y B dan a luz a D y E. La pareja C cumple 1 mes. Se cruzan las parejas A, B y C.	3+2=5 parejas en total.
Fin del mes 5	A, B y C dan a luz a F, G y H. D y E cumplen un mes. Se cruzan A, B, C, D y E.	5+3=8 parejas en total.
Fin del mes 6	A, B, C, D y E dan a luz a I, J, K, L y M. F, G y H cumplen un mes. Se cruzan A, B, C, D, E, F, G y H.	8+5=13 parejas en total.
...	...	...
...	...	...

Figure 1: Fibonacci.

$$\begin{cases} x(1) & = x(2) = 1 \\ x(t+2) & = x(t+1) + x(t). \end{cases}$$

Los primeros términos de esta sucesión son:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597...$$

Haciendo

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= x(t+1), \end{aligned}$$

la ecuación en diferencias de segundo orden puede plantearse de la siguiente manera,

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \; x_1(0) = 1, \; x_2(0) = 1.$$

Así, como los valores propios precisamente son $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, dado que[1] la solución general es de la forma

$$x(t) = c_1 \lambda_1^t + c_2 \lambda_2^t = c_1 \alpha^t + c_2 \beta^t.$$

Operando se llega al resultado deseado. Como

$$\begin{aligned} \frac{x(t+1)}{x(t)} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{t+1} - \beta^{t+1})}{\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^t - \beta^t)} \\ &= \frac{\alpha^{t+1} - \beta^{t+1}}{\alpha^t - \beta^t} \\ &= \frac{\alpha^{t+1}\left(1 - \frac{\beta^{t+1}}{\alpha^{t+1}}\right)}{\alpha^t\left(1 - \frac{\beta^t}{\alpha^t}\right)}. \end{aligned}$$

[1] Verificar analíticamente.

Como $|\beta| < |\alpha|$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\beta^t}{\alpha^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\beta^{t+1}}{\alpha^{t+1}} = 0.$$

Así,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x(t+1)}{x(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\alpha^{t+1}\left(1 - \frac{\beta^{t+1}}{\alpha^{t+1}}\right)}{\alpha^t\left(1 - \frac{\beta^t}{\alpha^t}\right)} = \alpha.$$

10) El modelo propuesto por el profesor Acemoglu en sus lectures es el siguiente

$$k(t+1) = sf(k(t)) + (1-\delta)k(t).$$

Este modelo tiene como origen los trabajos de Solow y Swan en teoría del crecimiento. Para $f(k) = k^\alpha$, obtenemos el equilibrio resolviendo

$$k^* = s(k^*)^\alpha + (1-\delta)k^*.$$

Así,

$$k^* = \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \ \alpha \neq 1.$$

El equilibrio aumenta con s y disminuye con δ, para $0 < \alpha < 1$ (f cóncava).