Práctica Dirigida 4: 1MAT27

Jefe de Prácticas: Marcelo Gallardo

Junio 2022

Pontificia Universidad Católica del Perú

marcelo.gallardo@pucp.edu.pe

1. Como hemos visto, si x^* es el equilibrio de la ecuación $x(t+1) = ax(t) + b$, la trayectoria solución viene dada por la expresión

$$\varphi(t) = a^t(x_0 - x^*) + x^*.$$

Se le pide que analice el comportamiento de las trayectorias en cada uno de los siguientes casos:

1. $-1 < a < 0$
2. $0 < a < 1$
3. $a < -1$
4. $a > 1$.

Recordemos que, dada la ecuación en diferencias

$$x(t+1) = ax(t) + f(t), \tag{1}$$

$f(t)$ una función cualquiera. Entonces, la solución general es de la forma

$$\varphi(t) = a^t x_0 + \sum_{k=1}^{t} a^{t-k} f(k-1), \ t = 1, 2... \tag{2}$$

En este caso, $f(t) = b$. Por ende

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= a^t x_0 + b\sum_{k=1}^{t} a^{t-k} \\
&= a^t x_0 + (a^{t-1} + ... + a^2 + a + 1)b \\
&= a^t x_0 + \left(\frac{1-a^t}{1-a}\right) b \\
&= a^t \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, recordemos que

$$x^* = ax^* + b.$$

Por ende,

$$x^* = \frac{b}{1-a}. \tag{3}$$

De este modo,

$$\varphi(t) = a^t(x_0 - x^*) + x^*. \tag{4}$$

```
% Comando para el estilo Latex

set(0,'defaulttextInterpreter','latex')
set(0, 'defaultAxesTickLabelInterpreter','latex');
set(0, 'defaultLegendInterpreter','latex');

% For images
set(0,'defaultAxesFontSize',15)
set(0, 'DefaultLineLineWidth', 2.0);

% Par[ametros
set(0,'defaulttextInterpreter','latex')
set(0, 'defaultAxesTickLabelInterpreter','latex');
set(0, 'defaultLegendInterpreter','latex');

% Para im[agenes
set(0,'defaultAxesFontSize',15)
set(0, 'DefaultLineLineWidth', 2.0);

% Par[ametros
a = 2;
b=2;

% Equilibrio
eq = b./(1-a);

% Condici[on inicial
x0 = 0;
t = linspace(0,20,100);
varphi = (a.^t).*(x0-eq)+eq;

% Gr[afica (t, varphi(t))
scatter(t, varphi,'*','b')
grid on
hold off
```

Con estos comandos, podemos reproducir diferentes casos, usando la solución analítica así como la ecuación en diferencias. Tomamos $x_0 = 0$.

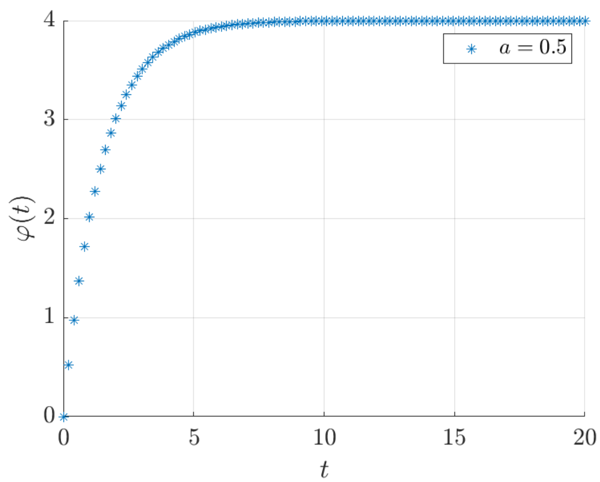

Figure 1: Caso $0 < a < 1$.

Para estos valores:

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \lim_{t\to\infty} (0.5)^t(x_0 - x^*) + x^* = x^* = \frac{2}{1 - 1/2} = 4.$$

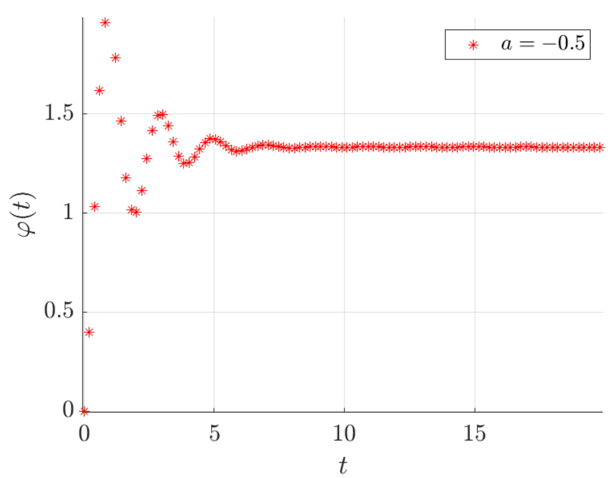

Figure 2: Caso $-1 < a < 0$.

Para estos valores:

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \lim_{t\to\infty} (-0.5)^t(x_0 - x^*) + x^* = x^* = \frac{2}{1 + 1/2} = \frac{4}{3}.$$

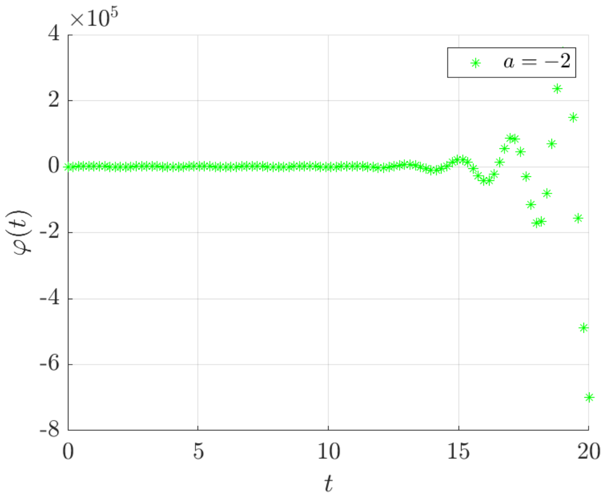

Figure 3: Caso $a < -1$.

En este caso, los valores oscilan (debido al término negativo $a = -2$), pero a largo plazo, los valores aumentan indefinidamente en valor absoluto. Esto se debe a que

$$\lim_{t \to \infty} a^t = \infty, \ a > 0.$$

Luego, $-2 = (-1)(2)$.

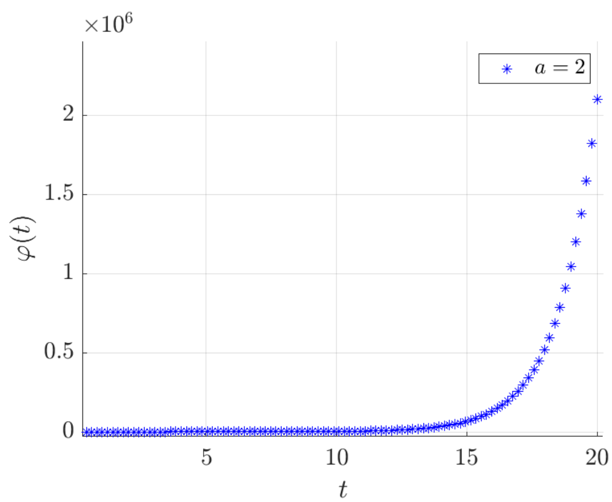

Figure 4: Caso $a > 1$.

La diferencia yace en que las trayectorias no oscilan.

1. $\varphi(t)$ es inestable si $|a| > 1$.
2. $\varphi(t)$ es estable si $|a| \leq 1$.
3. $\varphi(t)$ es oscilante si $a < 0$.
4. $\varphi(t)$ es monótona si $a > 0$.

2. Para la siguiente ecuación en diferencia, encuentre el equilibrio, analice su estabilidad y trace algunas trayectorias para diversas condiciones iniciales:

1. $2x(t+1) = -3x(t) - 2$.

Analicemos el caso

$$2x(t+1) = -3x(t) - 2.$$

Primero, expresamos esta ecuación en su forma general

$$x(t+1) = ax(t) + f(t).$$

Se tiene

$$x(t+1) = \frac{-3}{2}x(t) - 1.$$

En este caso,

$$\begin{aligned} a &= -\frac{3}{2} \\ b &= -1. \end{aligned}$$

Usando la ecuación de la solución general (4), reemplazando con los valores numéricos, se tiene

$$\varphi(t) = \left(-\frac{3}{2}\right)^t (x_0 - x^*) + x^*.$$

Para calcular x^*, usamos la expresión (3) para calcular $x^* = -2/5$. De este modo,

$$\varphi(t) = \left(-\frac{3}{2}\right)^t \left(x_0 + \frac{2}{5}\right) - \frac{2}{5}.$$

Escogemos los siguientes valores para x_0, $\{0, 1, 10, -10, -2/5\}$. Para realizar las gráficas, usamos el siguiente código:

```
% Comando para el estilo Latex
set(0,'defaulttextInterpreter','latex')
set(0, 'defaultAxesTickLabelInterpreter','latex');
set(0, 'defaultLegendInterpreter','latex');
set(0,'defaultAxesFontSize',15)
set(0, 'DefaultLineLineWidth', 2.0);
% Par[ametros
a = -1.5;
b=-1;
```

```
eq = b./(1-a);
x0 =-2./5;
t = linspace(0,5,5);
varphi = (a.^t).*(x0-eq)+eq;
scatter(t, varphi,'x', 'b', 'Linewidth', 2)
grid on
hold off
```

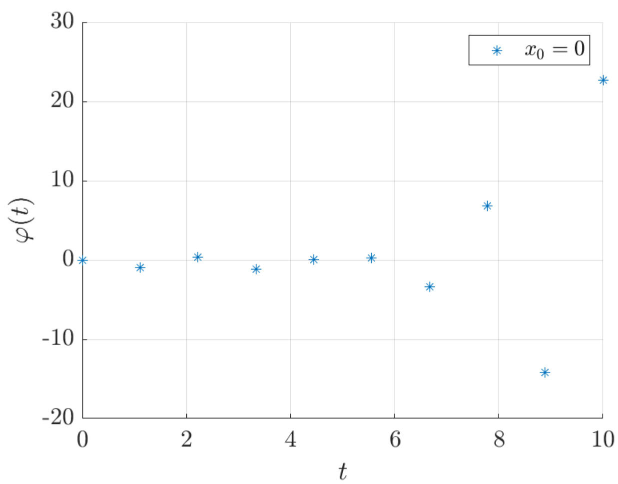

Figure 5: Caso $x_0 = 0$.

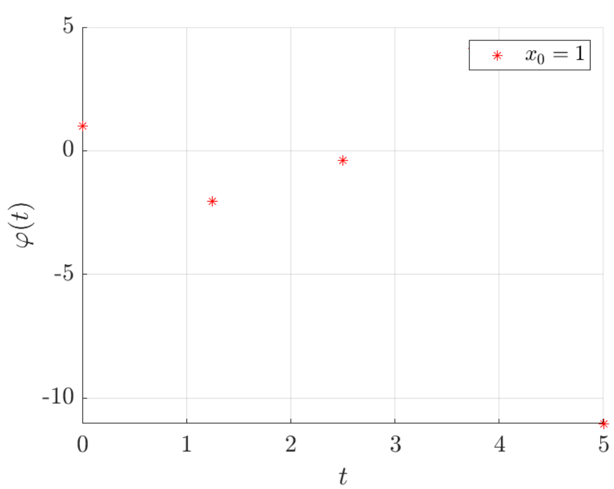

Figure 6: Caso $x_0 = 1$.

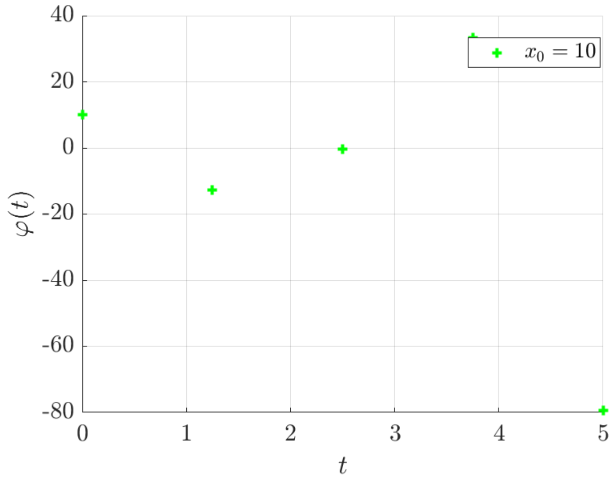

Figure 7: Caso $x_0 = 10$.

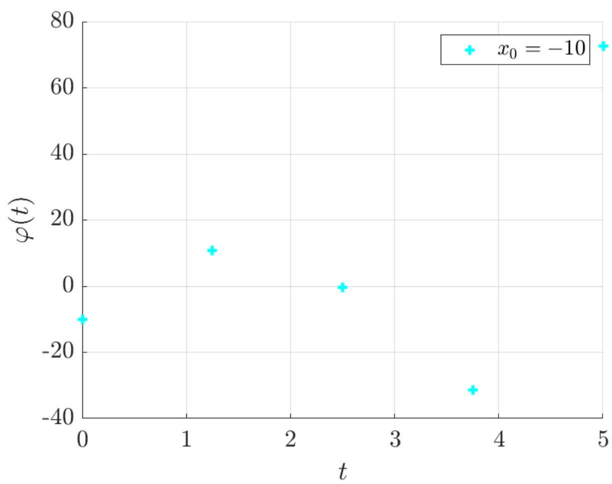

Figure 8: Caso $x_0 = -10$.

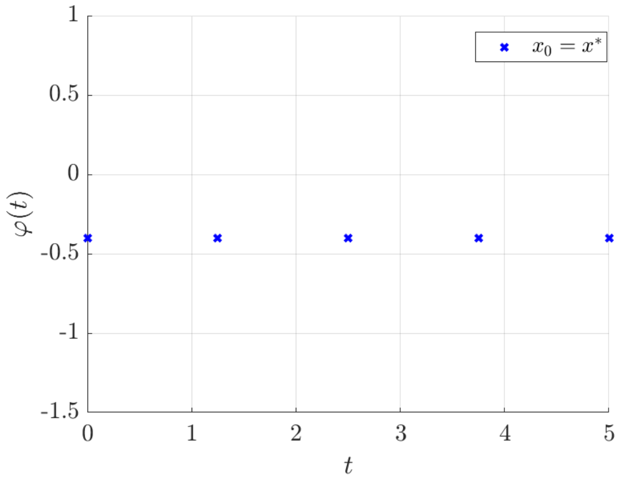

Figure 9: Caso $x_0 = -2/5$.

3. Resuelva la ecuación

$$x(t+1) = \frac{2}{3}x(t) + y(t)$$

sabiendo que $y(t)$ cumple la relación

$$y(t+1) = \frac{2}{3}y(t).$$

Primero, obtenemos una relación analítica para $y(t)$

$$y(t+1) = \frac{2}{3}y(t).$$

Esto es de la forma

$$y(t+1) = ay(t).$$

Por inducción, se sabe que

$$\varphi(t) = a^t y_0.$$

De este modo, la ecuación

$$x(t+1) = \frac{2}{3}x(t) + y(t)$$

es equivalente a la siguiente,

$$x(t+1) = \frac{2}{3}x(t) + \left(\frac{2}{3}\right)^t y_0.$$

Esta ecuación es de la forma (1), cuya solución es de la forma (2). De este modo, como $f(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t y_0$

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= a^t x_0 + \sum_{k=1}^{t} a^{t-k} f(k-1) \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^t x_0 + \sum_{k=1}^{t} \left(\frac{2}{3}\right)^{t-k} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} y_0\right) \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^t x_0 + y_0 \sum_{k=1}^{t} \left(\frac{2}{3}\right)^{t-k} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^t x_0 + y_0 \sum_{k=1}^{t} \left(\frac{2}{3}\right)^{t-k+k-1} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^t x_0 + y_0 \sum_{k=1}^{t} \left(\frac{2}{3}\right)^{t-1} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^t x_0 + y_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{t-1} \sum_{k=1}^{t} 1 \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^t x_0 + y_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{t-1} t.
\end{aligned}$$

4. Dada la función de demanda $Q(t) = 30 - 2p(t)$ y la función de oferta $S(t) = -6 + 4p(t-1)$, determine la trayectoria del precio $p(t)$, considerando $p(0) = 4$.

En estos modelos, la oferta iguala la demanda, o sea

$$\begin{aligned}
Q(t) &= S(t) \\
30 - 2p(t) &= -6 + 4p(t-1).
\end{aligned}$$

Entonces, nos queda la siguiente ecuación en diferencias

$$p(t) = -2p(t-1) + 18.$$

Identificamos, $a = -2$, $b = 18$. Observe que

$$\begin{aligned}
&p(1) = -2p(0) + 18 \\
&p(2) = -2p(1) + 18 = -2(-2p(0) + 18) + 18 = (-2)^2 p(0) + (-2+1)18 \\
&\quad \vdots \\
&p(t) = (-2)^t p(0) + 18\left[(-2)^0 + (-2)^1 + (-2)^2 + ... + (-2)^{t-1}\right]
\end{aligned}$$

De este modo,

$$p(t) = (-2)^t p(0) + 18\left(\frac{1-(-2)^t}{1-(-2)}\right) = (-2)^{t+1} + 6.$$

Note que también es posible aplicar directamente (4).

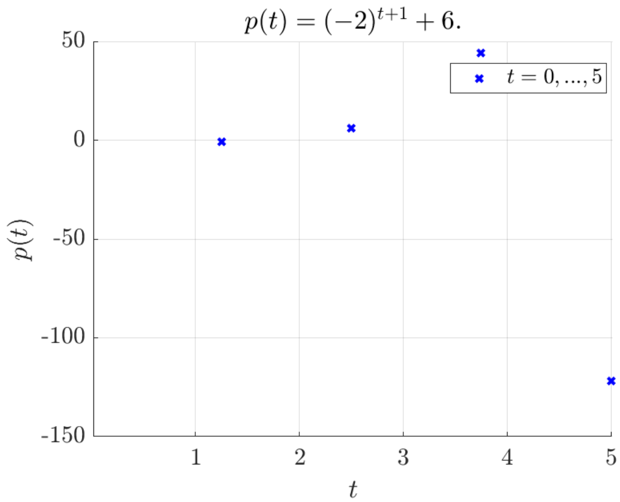

Figure 10: $p(t)$ a corto plazo.

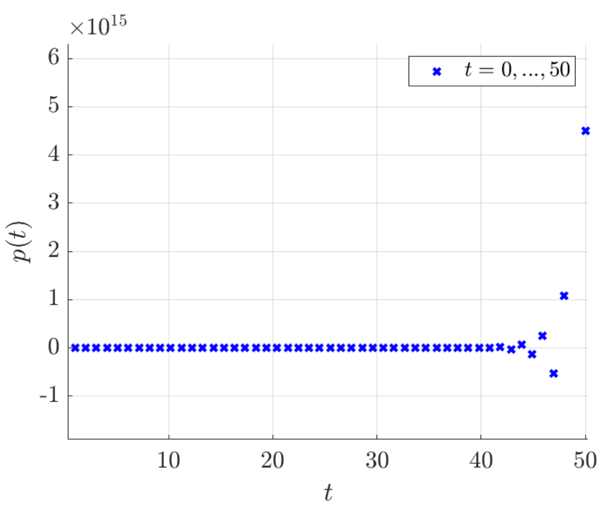

Figure 11: $p(t)$ a largo plazo.

Observación. *El modelo sugiere que le precio crece y oscila indefinidamente. Deberíamos modificar el modelo. ¿Cómo?*

$$|a| < 1 \implies p \to p^*.$$

¿Qué (a) tomar? Econometría.

$$p_{t+1} = ap_t + b + u_t,\ u_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

El objetivo es estimar a y b. ***Modelo AR(1)****.*

5. Obtenga y analice el modelo discreto de crecimiento poblacional de Malthus. Para esto, suponga una tasa de crecimiento constante per capita igual a $r > 0$.

El modelo de Malthus en tiempo discreto es el siguiente:

$$P(t+1) = (1+r)P(t),\ P(0) = P_0, \tag{5}$$

siendo

- P_0 la población inicial.
- r la tasa de crecimiento poblacional del modelo en tiempo continuo.
- $P(t)$ la población en el tiempo t.

En efecto,

$$P'(t) \sim \frac{P(t+1) - P(t)}{t+1-t} = rP(t).$$

Por ende,

$$P(t+1) - P(t) = rP(t).$$

Observación. *Es posible redefinir el modelo usando una tasa de crecimiento $\theta = 1 + r$ de la siguiente manera:*

$$P(t+1) = \theta P(t).$$

Esta formulación supone que la población crece en cada periodo en $\theta P(t)$.

Para resolver (5), aplicamos la fórmula de la solución general. Se obtiene

$$P(t) = (1+r)^t P(0).$$

En función de r, la población decrece hasta cero ($r < 0$) o crece indeterminadamente ($r > 0$).

```
%%Comando para el estilo Latex

set(0,'defaulttextInterpreter','latex')
set(0, 'defaultAxesTickLabelInterpreter','latex');
set(0, 'defaultLegendInterpreter','latex');

% Para im[agenes
set(0,'defaultAxesFontSize',15)
set(0, 'DefaultLineLineWidth', 2.0);

% Par[aametros
```

```
r1 = 1.01;
r2=0.99;
P0=1;
t = linspace(0,100,100);
varphi1 = (r1).^t.*P0;
varphi2 = (r2).^t.*P0;
% Gr[aficas
scatter(t, varphi1,'x', 'b', 'Linewidth', 2)
grid on
hold on
scatter(t, varphi2,'o', 'r', 'Linewidth', 2)
hold off
```

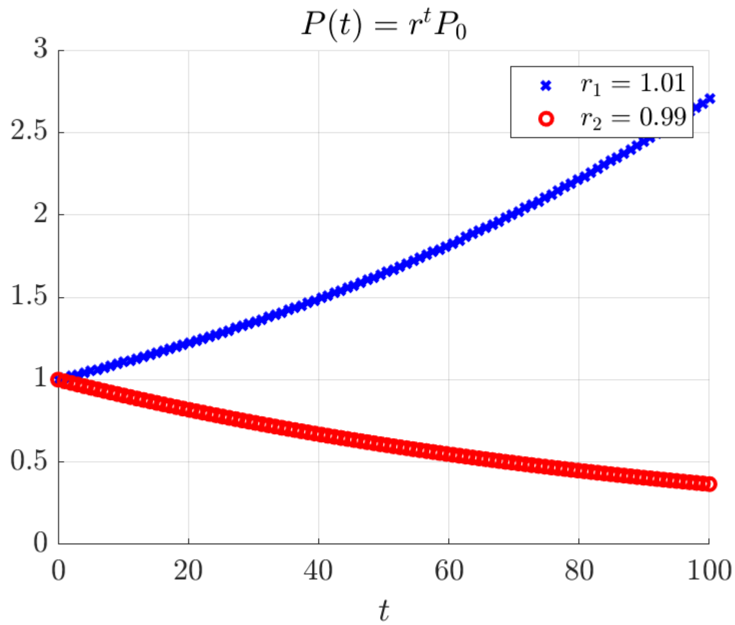

Figure 12: $P(t)$.

6. Encuentre la solución al siguiente sistema y analice su estabilidad.

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} x(t), \; x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema es de la forma

$$x(t+1) = Ax(t), \; A \in \mathcal{M}_{2\times 2}.$$

La solución general a este sistema de ecuaciones en diferencias es la siguiente

$$x(t) = A^t x(0).$$

Por ende, basta con calcular la matriz A^t. Para ello, recordemos que, si A es diagonalizable, entonces

$$A = PDP^{-1}$$

y

$$A^t = PD^tP^{-1}.$$

Observación. *Aquí D es una matriz diagonal cuyas entradas en la diagonal son los valores propios de A, y P es la matriz formada por los vectores propios de A, ordenadas por columnas en función del orden de los valores propios en la diagonal de D. Note que, al ser las columnas de P valores propios, estos son l.i., y por ende, P es no singular. En caso A no sea diagonalizable, se pasa por la forma canónica de Jordan.*

Diagonalicemos entonces la matriz A. El polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 12.$$

Las raíces son $\lambda_1 = -4$ y $\lambda_2 = 3$. Luego, los vectores propios son, respectivamente, $v_1 = (-1, 1)^T$ y $v_2 = (6, 1)^T$. Luego,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

y

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-4)^t & 0 \\ 0 & 3^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Operando, se obtiene

$$A^t = \begin{pmatrix} \frac{(-4)^t + 2\cdot 3^{t+1}}{7} & \frac{-6(-4)^t + 2\cdot 3^{t+1}}{7} \\ \frac{-(-4)^t + 3^t}{7} & \frac{6(-4)^t + 3^t}{7} \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$x(t) = A^t x_0 = \begin{pmatrix} \frac{(-4)^t + 2\cdot 3^{t+1}}{7} & \frac{-6(-4)^t + 2\cdot 3^{t+1}}{7} \\ \frac{-(-4)^t + 3^t}{7} & \frac{6(-4)^t + 3^t}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(-4)^t + 2\cdot 3^{t+1}}{7} \\ \frac{-(-4)^t + 3^t}{7} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, como el radio espectral

$$\rho = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i| = 4 > 1,$$

el sistema no es estable.

7. Resuelva las siguientes ecuaciones:

- $x(t+2) - 3x(t+1) = -2x(t)$
- $x(t+2) = 2x(t+1) - 3x(t) + 2.$

Estas ecuaciones son de la forma

$$x(t+2) = ax(t+1) + bx(t) + c(t).$$

En el primer caso,

- $c(t) = 0$
- $b = -2$
- $a = 3.$

Efectuamos el siguiente cambio de variable (análogo al caso continuo)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= x(t+1). \end{aligned}$$

De este modo,

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) &= x(t+2) = 3x(t+1) - 2x(t) = 3x_2(t) - 2x_1(t). \end{aligned}$$

Por ello, este sistema puede formularse de la siguiente manera (de forma matricial)

$$\boldsymbol{y}(t+1) = \begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}_{=A} \boldsymbol{y}(t).$$

La solución es entonces de la forma

$$\boldsymbol{y}(t) = A^t \boldsymbol{y}_0.$$

Los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. Los vectores propios asociados a estos valores propios son, respectivamente, $v_1 = (1,1)^T$ y $v_2 = (1,2)^T$. Así,

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^t & 0 \\ 0 & 2^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Luego,

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^t & 0 \\ 0 & 2^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10}(2-2^t) + x_{20}(2^t - 1) \\ x_{10}(2-2^{t+1}) + x_{20}(2^{t+1} - 1) \end{pmatrix}.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) \\ &= x_{10}(2-2^t) + x_{20}(2^t-1) \\ &= (x_{20}-x_{10})2^t + 2x_{10} - x_{20}. \end{aligned}$$

En el segundo caso,

$$x(t+2) = 2x(t+1) - 3x(t) + 2.$$

Nuevamente haciendo el cambio de variable correspondiente, e identificando $a = 2$, $b = -3$ y $c = 2$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias.

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

En este caso

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + i\sqrt{2} \\ \lambda_2 &= 1 - i\sqrt{2} \\ v_1 &= \left(\frac{1}{3}(1 - i\sqrt{2}), 1\right) \\ v_2 &= \left(\frac{1}{3}(1 + i\sqrt{2}), 1\right). \end{aligned}$$

Definimos

$$v_j = r \pm is = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} \sqrt{2}/3 \\ 0 \end{pmatrix} i.$$

Luego, recordemos que

$$\lambda_j = \alpha \pm i\beta,\ \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},\ \cos(\theta) = \frac{\alpha}{\rho},\ \sin(\theta) = \frac{\beta}{\rho},$$

se tiene que

$$A = PJP^{-1}$$

con

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Así (inducción),

$$J^t = \rho^t \begin{pmatrix} \cos(\theta t) & -\sin(\theta t) \\ \sin(\theta t) & \cos(\theta t) \end{pmatrix}.$$

En este caso

$$\rho = \sqrt{1^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{3},\ \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \sin(\theta) = \sqrt{\frac{2}{3}},\ t\theta = t \arctan\sqrt{2}.$$

La solución homogénea se obtiene reemplazando con esto valores en

$$\boldsymbol{y}_h(t) = \rho^t \left[\left(c_1 \cos(\theta t) + c_2 \sin(\theta t) \right) r + \left(c_2 \cos(\theta t) - c_1 \sin(\theta t) \right) s \right],$$

Por otro lado, como se trata del caso **no homogéneo**, se tiene que calcular $\boldsymbol{y}_p = \boldsymbol{y}^*$. Tenemos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}^* &= A\boldsymbol{y}^* + \boldsymbol{b} \\ (\mathbb{I} - A)\boldsymbol{y}^* &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{y}^* &= (\mathbb{I} - A)^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente, $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}_h(t) + \boldsymbol{y}^*$ y $x(t)$ corresponde a la primera entrada de este vector.

Lima, 3 de junio del 2022.